KW: la logica della dimostrabilità

Giorgia Dal Prà

Alma Mater Studiorum – Univesità di Bologna

6 Maggio 2024

Indice

Table of Contents

Storia di KW

Gödel, K., 1933, "Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls," *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 4: 39–40; translation "An Interpretation of the Intuitionistic Propositional Calculus," in K. Gödel, *Collected Works*

Gödel 1933 suggerisce *en passant* di interpretare l'essere dimostrabile come un operatore modale.

KW è una logica modale che ben rappresenta la dimostrabilità nell'aritmetica di Peano (PA).

Table of Contents

Il sistema assiomatico di KW

La logica KW è definita dagli assiomi:

- Tutte le tautologie $(Taut)$
- $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ (K)
- $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ (W)
- $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$ $(def_{\Diamond})$

e dalle regole di inferenza:

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}\ MP$$

$$\frac{A}{\Box A}\ N$$

Corrispondenza e validità

Teorema (ordine dualmente ben fondato)

Lo schema W è valido su una struttura se e solo se essa ha una relazione d'accessibilità dualmente ben fondata e transitiva:

$$\mathcal{F} \models \Box(\Box A \to A) \to \Box A \textit{ sse } \mathcal{F} \rhd \textit{ dualmente ben fondato}$$

Definizione

Una relazione $\mathcal{R}$ è un *ordine dualmente ben fondato* sse $\mathcal{R}$ è irriflessiva, transitiva e non esistono catene infinite ascendenti, ovvero non esistono $\mathcal{R}$-successioni infinite: $x_0 \mathcal{R} x_1 \mathcal{R} x_2 \mathcal{R} x_3 \mathcal{R} \ldots$

Validità

Dal Teorema 1 segue:

Teorema

KW è valida sulla classe delle strutture irriflesive, transitive e prive di $\mathcal{R}$-catene infinite ascendenti. In particolare KW è valida rispetto alla classe degli ordini parziali stretti finiti.

Teorema $\vdash_{KW} \Box B \to \Box\Box B$

Proof.

1. $\vdash_{KW} B \to ((\Box B \wedge \Box\Box B) \to (B \wedge \Box B))$ Taut
2. $\vdash_{KW} B \to (\Box(B \wedge \Box B) \to (B \wedge \Box B))$ K(1), Taut [2]
3. $\vdash_{KW} \Box B \to \Box(\Box(B \wedge \Box B) \to (B \wedge \Box B))$ RM [2]
4. $\vdash_{KW} \Box(\Box(B \wedge \Box B) \to (B \wedge \Box B)) \to \Box(B \wedge \Box B))$ W
5. $\vdash_{KW} \Box B \to \Box(B \wedge \Box B)$ Taut [3,4]
6. $\vdash_{KW} \Box B \to \Box B \wedge \Box\Box B$ K(1), Taut [5]
7. $\vdash_{KW} \Box B \to \Box\Box B$ Taut [6]

$\Box$

Teoremi e non teoremi di KW

Sono teoremi di KW:

- $((\Box A \to A) \land \Box(\Box A \to A)) \to A$
- $\Box(\Box\bot \to \bot) \to \Box\bot$
- $\Diamond\top \to \neg\Box\Diamond\top$
- $\Diamond\top \to \Diamond\Box\bot$
- $\Box\bot \leftrightarrow \Box\Diamond\top$

Non sono teoremi di KW:

- $\Box A \leftrightarrow A$
- $\Diamond\top$
- $\neg\Box\bot$
- $\Box\Diamond\top$

Completezza di KW

Teorema

La logica KW è completa rispetto agli ordini parziali stretti finiti.

Teorema

La logica KW non è fortemente completa, ovvero non vale che:

$$\Gamma \vdash_{KW} B \quad \text{sse} \quad \Gamma \models_{KW} B$$

Teorema

La logica KW non è canonica.

Table of Contents

Aritmetica di Peano

(PA1) $\forall x \neg(S(x) = 0)$

(PA2) $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$

(PA3) $\forall x (x + 0 = x)$

(PA4) $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$

(PA5) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$

(PA6) $\forall x (x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x)$

(PA7) $\forall \vec{x} [(A(0, \vec{x}) \wedge \forall y (A(y, \vec{x}) \rightarrow A(S(y), \vec{x}))) \rightarrow \forall y A(y, \vec{x})]$

Gödelizzazione

Deriviamo il numero di Gödel della formula $\forall x(x = x)$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\forall & x & (& x & = & x &) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
23 & 31 & 27 & 31 & 11 & 31 & 29 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
2^{23} & 3^{31} & 5^{27} & 7^{31} & 11^{11} & 13^{31} & 17^{29}
\end{array}
$$

Figure: Esempio di calcolo del numero di Gödel

Table of Contents

Il predicato $Teor_{PA}(x)$

Sia $prova(n, m)$ la relazione che intercorre tra due numeri naturali n e m quando n è il numero di Gödel di una dimostrazione di una formula di numero di Gödel m. Si dimostra che tale relazione è fortemente rappresentabile nell'aritmetica (formale) PA, ovvero che esiste una formula $Dim(x, y)$ di PA tale che per ogni n ed m:

$$PA \vdash Dim(\overline{n}, \overline{m}) \text{ se vale } prova(n, m)$$
$$PA \vdash \neg Dim(\overline{n}, \overline{m}) \text{ se vale } non\ prova(n, m)$$

Definizione

$$Teor_{PA}(x) \text{ sse } PA \vdash \exists y Dim(y, x)$$

Proprietà di $Teor_{PA}(x)$

Il predicato unario $Teor_{PA}(x)$ gode delle seguenti proprietà:

T1 $PA \vdash A$ solo se $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{A})$;

T2 $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{A}) \wedge Teor_{PA}(\overline{A \to B}) \to Teor_{PA}(\overline{B})$;

T3 $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{A}) \to Teor_{PA}(\overline{Teor_{PA}(\overline{A})})$.

Teorema di Löb

Nel 1952 Leon Henkin pose una questione relativamente agli enunciati che esprimono la propria dimostrabilità, ovverro tali che $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{A}) \leftrightarrow A$. Come sappiamo dal primo teorema di incompletezza gli enunciati che esprimono la propria indimostrabilità, ovverto tali che $PA \vdash \neg Teor_{PA}(\overline{A}) \leftrightarrow A$, non sono dimostrabili, ma sono veri.
Löb dimostra che il predicato $Teor_{PA}(x)$ gode della sequente properietà:

T4 $PA \vdash Teor_{PA}(\overline{A}) \rightarrow A$ solo se $PA \vdash A$

Una versione formalizzata:

$$PA \vdash Teor_{PA}(\overline{Teor_{PA}(\overline{A}) \rightarrow A}) \rightarrow Teor_{PA}(\overline{A})$$

Realizzazione e teorema di Solovay

Sia τ una funzione di traduzione dall'insieme delle variabili enunciative Φ a enunciati di PA, tale che:

- $\tau(\bot) = \bot$;
- $\tau(A \to B) = \tau(A) \to \tau(B)$
- $\tau(\Box A) = Teor_{PA}(\tau(A))$

Teorema (Teorema di Solovay, 1976)

$\vdash_{KW} A$ *sse per ogni traduzione* τ, $PA \vdash \tau(A)$

Table of Contents

2° teorema di Gödel via teorema di Löb

Se T è gödeliana e consistente, allora $\nvdash CON_T$.

Proof.

Supponiamo per assurdo che CON_T, allora

1. $T \vdash \neg Teor_{PA}(\overline{\perp})$
2. $T \vdash Teor_{PA}(\overline{\perp}) \rightarrow \perp$ Duns Scoto
3. $T \vdash \perp$ teorema di Löb

Quindi T è inconsistente, contrariamente all'ipotesi. □

Alcune proprietà metateoriche di PA

- $\neg Teor_{PA}(\overline{\perp})$
- $Teor_{PA}(\overline{\neg Teor_{PA}(\overline{\perp})})$
- $\neg Teor_{PA}(\overline{\perp}) \to \neg Teor_{PA}(\overline{\neg Teor_{PA}(\overline{\perp})})$
- $Teor_{PA}(\overline{\neg Teor_{PA}(\overline{\perp}) \to \neg Teor_{PA}(\overline{\neg Teor_{PA}(\overline{\perp})})})$