Una semantica per la logica intuizionista

Il legame tra modalità e intuizionismo da Brouwer a Kripke

Relazione afferente l'insegnamento Metodi Logici per la Filosofia

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

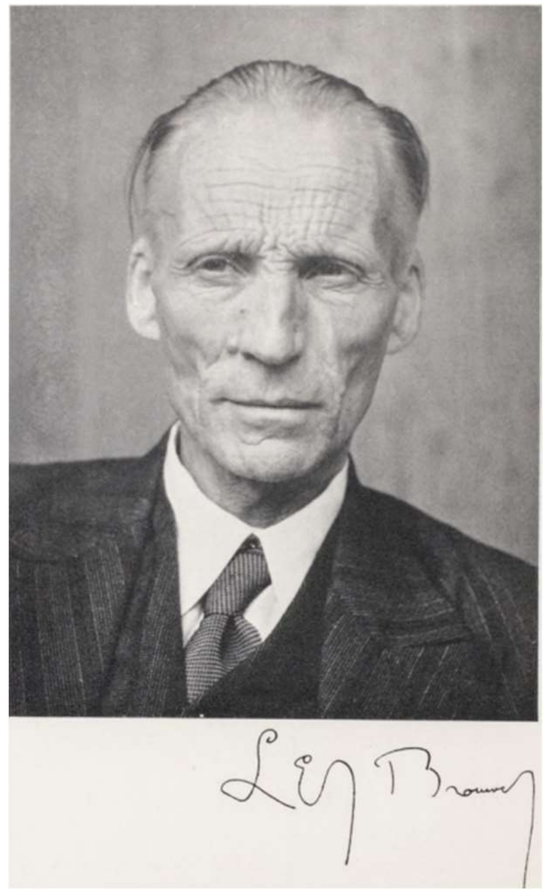
Tommaso Ortolani

Problemi e problemi

Teorema Esistono soluzioni di ‘$x^y = z$’ con ‘x’ e ‘y’ irrazionali e ‘z’ razionale.

Dimostrazione $\sqrt{2}$ è irrazionale, e $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ o è razionale o è irrazionale. Se è razionale, poniamo ‘$x = \sqrt{2}$’, ‘$y = \sqrt{2}$’ così che ‘$z = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$’ che, per ipotesi, è razionale. Se invece $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è irrazionale, poniamo ‘$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$’ e ‘$y = \sqrt{2}$’, da cui ‘$z = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$’, che è certamente razionale. Perciò esiste una soluzione in entrambi i casi.

Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966)



Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966)

1907: dottorato in matematica.

1908: *Die Onbetrouwbaarheid der Logische Principes* (*L'inaffidabilità dei principi logici*).

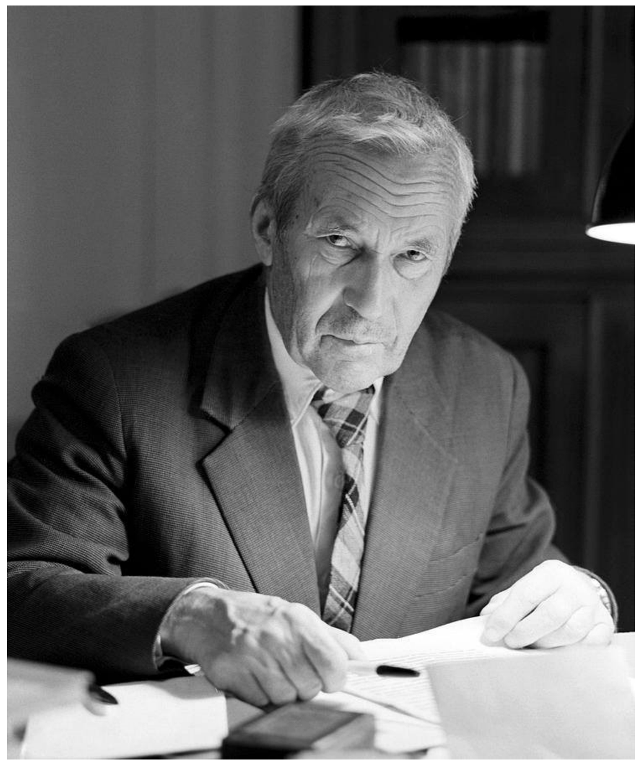
Riconosce che: se la logica classica (**LC**) si adatta a strutture finite, in cui la verità di una proposizione può essere decisa con la "semplice osservazione", questo cessa di essere corretto per le strutture infinite, come gli insiemi introdotti da Cantor pochi anni prima.

Non più solo una logica

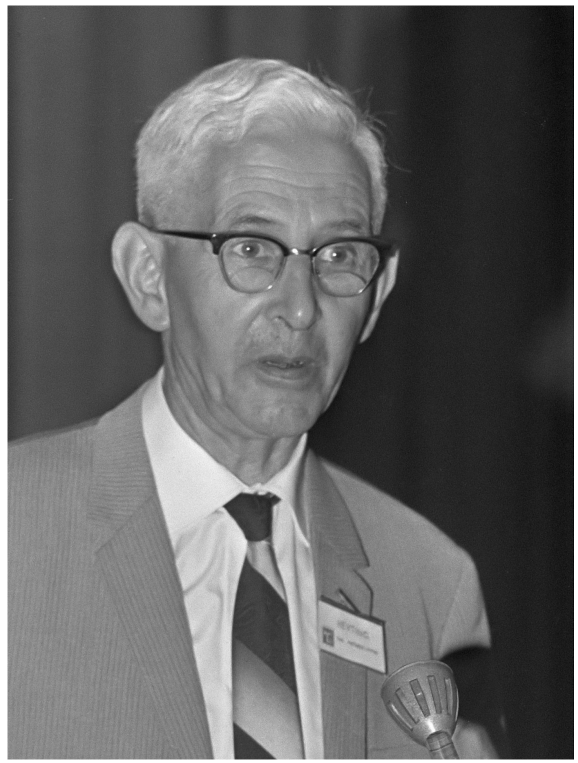
In **LC** la verità è intesa come corrispondenza. Tuttavia, secondo Brouwer, il matematico non descrive un regno platonico di enti, ma costruisce questi oggetti nella sua mente. Nella logica intuizionista (**LI**) la verità è intesa come dimostrabilità. Le operazioni in **LI** preservano quindi la giustificazione, rispetto all'evidenza e alla dimostrabilità, piuttosto che la valutazione della verità.

In **LC** qualsiasi affermazione è sempre immediatamente accessibile o meno, per corrispondenza. Al contrario, in **LI**, è possibile che qualche affermazione, fino a questo punto, non sia stata né provata né confutata. Di conseguenza, la legge fondamentale del terzo escluso, '$A \vee \neg A$', non è valida (globalmente).

Andrej Nikolaevič Kolmogorov (1903-1987)



Arend Heyting (1898-1980)



Logica intuizionista (interpretazione BHK)

A statement ϕ *is considered to be true (or to hold) if we have a proof for it. By a proof we mean a mathematical construction that establishes* ϕ*, not a deduction in some formal system. For example, a proof of '2 + 3 = 5' consists of the successive constructions of 2, 3 and 5, followed by a construction that adds 2 and 3, followed by a construction that compares the outcome of this addition and 5.*

Cit. *Logic and Structure: Fourth Edition,* van Dalen, 2008, p.154.

Logica intuizionista (interpretazione BHK)

I1: Una dimostrazione di ‘A ∧ B’ è data presentando una dimostrazione di ‘A’ e una dimostrazione di ‘B’.

I2: Una dimostrazione di ‘A ∨ B’ è data presentando o una dimostrazione di ‘A’ o una dimostrazione di ‘B’ (ed esplicitando che vogliamo considerare la dimostrazione esibita come dimostrazione della disgiunzione).

I3: Una dimostrazione di ‘A → B’ è una costruzione che permette di trasformare qualsiasi dimostrazione di ‘A’ in una dimostrazione di ‘B’.

I4: L’assurdo ‘⊥’ non ha nessuna dimostrazione. Una dimostrazione di ‘¬A’ è una costruzione che trasforma ogni ipotetica dimostrazione di ‘A’ in una dimostrazione di ‘⊥’ (quindi ‘¬A’ è equivalente a ‘A → ⊥’).

Leggi valide nell'interpretazione BHK:

$A \rightarrow \neg\neg A$

$\neg A \leftrightarrow \neg\neg\neg A$

$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow \neg A)$

$\neg\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg\neg B) \leftrightarrow \neg\neg(\neg A \vee B)$

$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)$

$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Cit. *dispense logica intuizionistica*, Lolli, 2015, p. 4.

Leggi classiche non valide nell'interpretazione BHK:

$\neg\neg A \rightarrow A$

$\neg A \vee \neg\neg A$

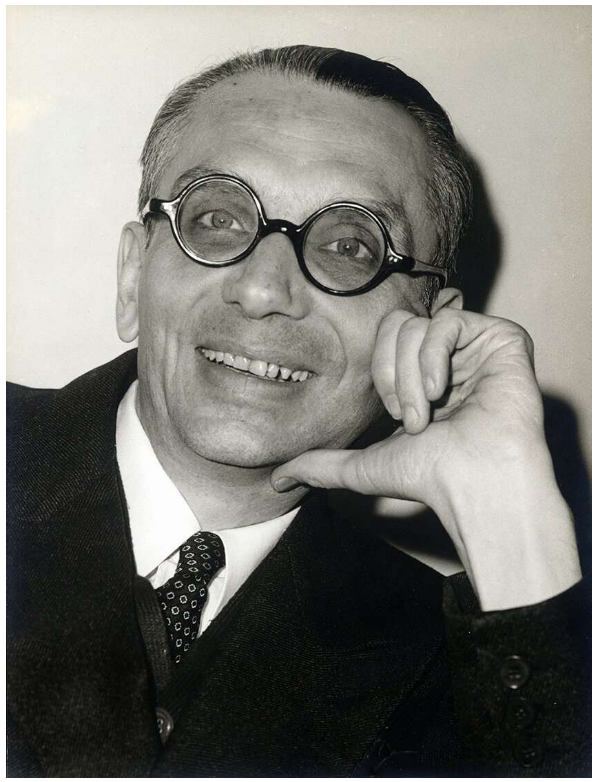
$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

$\neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow A \vee B$

$\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \wedge B$

Cit. *dispense logica intuizionistica*, Lolli, 2015, p. 4.

Kurt Friedrich Gödel (1906-1978)



Le traduzioni di Gödel

1933: *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls* (*Un'interpretazione del calcolo intuizionistico proposizionale*). Traduzione classica di **LI** (ausilio operatore '□').

1933: *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie* (*Sull'aritmetica intuizionista e la teoria dei numeri*). Traduzione intuizionista di **LC** (ausilio operatore '◊').

Successive slide cit. *Logica intuizionistica e logica classica a confronto*, Sambin, 2011, pp. 100-106.

Le traduzioni di Gödel

$$A \wedge^{i} B =_{def} A \wedge^{c} B$$

$$A \vee^{i} B =_{def} \Box A \vee^{c} \Box B$$

$$A \rightarrow^{i} B =_{def} \Box A \rightarrow^{c} \Box B$$

Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls

La traduzione ‘°’ si definisce per induzione con le seguenti clausole:

$$P^\circ =_{def} P \textit{ per ogni formula atomica } P$$

$$(A \wedge^i B)^\circ =_{def} A^\circ \wedge B^\circ$$

$$(A \vee^i B)^\circ =_{def} \Box A^\circ \vee \Box B^\circ$$

$$(A \rightarrow^i B)^\circ =_{def} \Box A^\circ \rightarrow \Box B^\circ$$

La traduzione ‘A°’ è ottenuta traducendo tutte le occorrenze delle costanti logiche che compaiono in ‘A’.

Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls

Aggiungendo: ‘$\Box A \rightarrow A$’, ‘$\Box A \rightarrow \Box\Box A$’, ‘$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$’;

E la regola: ‘*se* A *è dimostrabile, allora* □A *è dimostrabile*’;

Si può dimostrare che per ogni proposizione ‘A’ (di **LI**) si ha: ‘A° *è dimostrabile per* **LC** *sse* A è *dimostrabile per* **LI**’.

Non è necessario avere una clausola che traduca la negazione, perché è definita da ‘$\neg A =_{def} A \rightarrow \bot$’, e quindi la clausola su ‘$\rightarrow$’ dice che vale ‘$(\neg^i A)^\circ =_{def} \neg\Box A^\circ$’. Infatti: ‘$(\neg^i A)^\circ =_{def} (A \rightarrow \bot)^\circ =_{def} \Box A^\circ \rightarrow \Box\bot^\circ =_{def} \Box A^\circ \rightarrow \bot =_{def} \neg\Box A^\circ$’, perché ‘$\bot^\circ =_{def} \bot$’ e ‘$\Box\bot$’ equivale a ‘$\bot$’.

Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie

La traduzione ‘$*$’ si definisce per induzione con le seguenti clausole:

$$P* =_{def} \Diamond P \textit{ per ogni proposizione atomica } P$$

$$(A \wedge^c B)* =_{def} A* \wedge B*$$

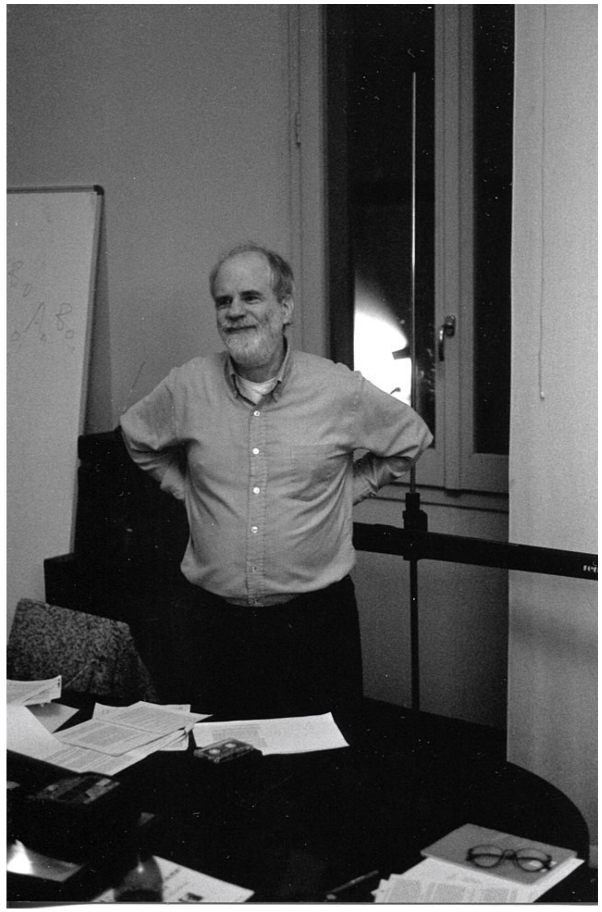
$$(A \vee^c B)* =_{def} \Diamond(A* \vee B*)$$

$$(A \rightarrow^c B)* =_{def} A* \rightarrow B*$$

Si ha quindi: ‘A *è dimostrabile per* **LC** *sse* A$*$ *è dimostrabile per* **LI**’.

Per **LI** non c’è bisogno di aggiungere la modalità ‘$\Diamond$’ per capire cosa intende per vero **LC**. Infatti un secondo risultato di Gödel (dello stesso articolo), mostra che una modalità ‘$\Diamond$’ utilizzabile per la traduzione è definibile all’interno delle costanti logiche di **LI** in modo molto semplice: ‘$\Diamond =_{def} \neg\neg$’.

Saul Aaron Kripke (1940-2022)



La semantica di Kripke per l'intuizionismo

The basic idea behind Kripke semantics is that we evaluate formulas relative to "points" that, intuitively, reflect states of affairs. We have already remarked that in classical logic, truth is understood as correspondence. Consequently, we may understand a point as corresponding to an external state of affairs such as a possible world. Because such states of affairs are complete, points are complete: for any point, and any formula, either that formula is true at that point, or it is not. By contrast, in intuitionistic logic, points are understood as stages in some construction.

Cit. Ciardelli, *Intuitionistic Logic*, 2021, p. 20.

La semantica di Kripke per l'intuizionismo

There are two important features of intuitionistic Kripke semantics that follow from this interpretation:

1. *It is possible that at some point in the construction the mathematician has neither proved a formula nor its negation. Hence points in intuitionistic Kripke semantics are partial.*
2. *Successor points always "inherit" proofs of formulas from their predecessor points. The idea is that, intuitively, once the mathematician has (correctly) proved a statement, that proof will not be forgotten at some later stage in the construction.*

Cit. Ciardelli, *Intuitionistic Logic*, 2021, p. 20.

La semantica di Kripke per l'intuizionismo

Una **struttura** intuizionista di Kripke è una coppia '$S = \{W, R\}$', dove 'W' è un insieme e 'R' è un ordine parziale su 'W', cioè una relazione binaria tra elementi di 'W' che soddisfa:

La proprietà **riflessiva**: '$\forall w \in W : wRw$';

La proprietà **transitiva**: '$\forall w, v, u \in W : wRv \wedge vRu \Rightarrow wRu$'.

I **successori** vengono definiti nel seguente modo: '$R[w] =_{\text{def}} \{v \in W \mid wRv\}$'.

Un **modello** intuizionista di Kripke è una tripletta '$M = \langle W, R, V \rangle$' nella quale '$\langle W, R \rangle$' indica il modello e '$V : \phi \rightarrow P(W)$' è una funzione di valutazione che rispetta il seguente criterio di **persistenza**: '$w \in V(\mathrm{p}) \wedge wRv \Rightarrow v \in V(\mathrm{p})$'.

Successive slide cit. Ciardelli, *Intuitionistic Logic*, 2021, pp. 21-25.

La semantica di Kripke per l'intuizionismo

$M \vDash_w \mathrm{p}$ *sse* $\mathrm{p} \in V(\mathrm{p})$

$M \sim\vDash_w \bot$

$M \vDash_w \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ *sse* $M \vDash_w \mathrm{A}$ *e* $M \vDash_w \mathrm{B}$

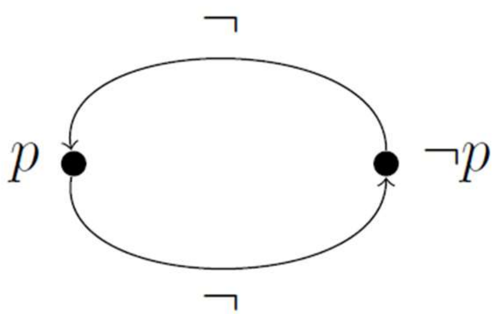
$M \vDash_w \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ *sse* $M \vDash_w \mathrm{A}$ *o* $M \vDash_w \mathrm{B}$

$M \vDash_w \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ *sse* $\forall v \in R[w] : [M \vDash_v \mathrm{A} \Rightarrow M \vDash_v \mathrm{B}]$

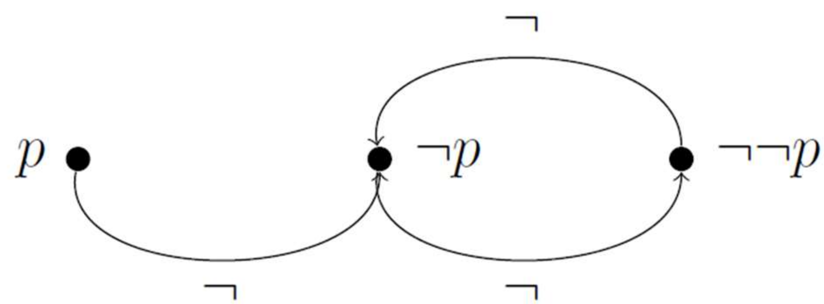
$M \vDash_w \neg\mathrm{A}$ *sse* $\forall v \in R[w] : [M \vDash_v \mathrm{A} \Rightarrow M \vDash_v \bot] \Leftrightarrow \forall v \in R[w] : M \sim\vDash_v \mathrm{A}$

Il comportamento della negazione

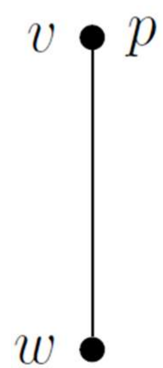
LC



LI



Esempi di alcuni contromodelli



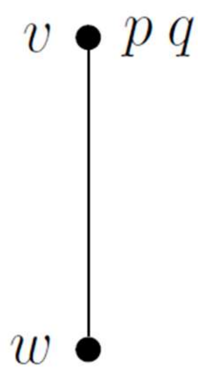
$\sim\vdash_{\mathbf{LPI}} \mathbf{p} \vee \neg\mathbf{p}$

$\sim\models_{w}$ p

$\sim\models_{w} \neg$p

$\sim\models_{w}$ p $\vee$ $\neg$p

Esempi di alcuni contromodelli



$\sim\vdash_{LPI} (p \to q) \to \neg p \lor q$

$\models_w p \to q$

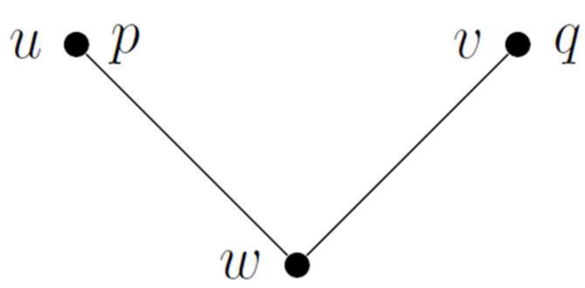
$\sim\models_w \neg p$

$\sim\models_w q$

$\sim\models_w \neg p \lor q$

$\sim\models_w (p \to q) \to \neg p \lor q$

Esempi di alcuni contromodelli



$\sim\!\vdash_{\mathbf{LPI}} \mathbf{(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)}$

$\sim\!\models_w p \rightarrow q$

$\sim\!\models_w q \rightarrow p$

$\sim\!\models_w (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Bibliografia

L. E. J. BROUWER [1908], *Die Onbetrouwbaarheid der Logische Principes*, trad. en. di M. van Atten, G. Sundholm, in « History and Philosophy of Logic», 38 (2017) 1.

I. CIARDELLI, L. GROHMANN, T. VIRBICKAS, B. KEMMANN [2021], *Intuitionistic Logic*, Munich Center for Mathematical Philosophy.

L. CROSILLA [2016], *Matematica costruttiva*, «APhEx», 14 (2016).

D. VAN DALEN (a cura di) [2011^2], *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge U.P.

D. VAN DALEN [2008^2], *Logic and Structure: Fourth Edition*, Springer.

K. F. GÖDEL [1933a], *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, trad. en. in *Collected Works, Volume I, Publications 1929-1936 by Kurt Gödel*, AA. VV., Oxford U.P., 1986.

K. F. GÖDEL [1933b], *Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls*, trad. en. in *Collected Works, Volume I*, cit.

M. DUMMETT [2000^2], *Elements of Intuitionism*, Oxford U.P.

A. HEYTING [1971^3], *Intuitionism: An Introduction*, North-Holland Publishing Company.

G. LOLLI [2015], *Dispense: Filosofia della Matematica*, Scuola Normale Superiore, URL = http://homepage.sns.it/lolli/dispense13.htm.

G. MINTS [2000], *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*, Kluwer Academic Publishers.

J. MOSCHOVAKIS [2022^2], *Intuitionistic Logic*, in E. N. Zalta (a cura di), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = https://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/.

W. V. O. QUINE [1953], *Three Grades of Modal Involvement*, trad. it. di M. Santambrogio, in *Metafisica*, Achille C. Varzi (a cura di), Laterza, 2018.

G. SAMBIN [2011], *Logica intuizionistica e logica classica a confronto*, in *Un mondo di idee: La matematica ovunque*, C. Ciliberto, R Lucchetti (a cura di), Spinger, 2011.