es. 1.1 dal libro

1) th $\models \Box \top$

Sia $F=\langle W, R\rangle$ una struttura. Sia $M=\langle W, R, I\rangle$ un modello basato su questa struttura. Sia $w \in W$. Devo dimostrare $\models^M_w \Box \top$, ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v \top$). Sia $v \in$. Devo mostrare $\models^M_v \top$. Chiaro, poiché le tautologie classiche sono valide anche in logica modale.

2) th. $\models \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

$\rightarrow$: visto a casa per il 13/02

$\leftarrow$: visto a lezione il 13/02

3) th. $\models \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

Siano F una struttura, $M=\langle W, R, I\rangle$ un modello basato su F e $w \in W$. Devo dimostrare

$\models_w \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$:

$\rightarrow$: assumo $\models_w \Diamond(A \vee B$, ovvero $\exists v \in W$ (wRv e $\models_v A \vee B$) H e dimostro $\models_w \Diamond A \vee \Diamond B$, ovvero $\models_w \Diamond A$ o $\models \Diamond B$, ovvero $\exists v \in W$ (wRv e $\models_v A$) o $\exists v \in W$ (wRv e $\models_v B$).

Per H, sia $v \in W$ (K_1) tale che wRv (K_2) e $\models_v A \vee B$, ovvero $\models_v A$ o $\models_v B$. Procedo per casi:

- caso $\models_v A$ (K_3): scelgo di dimostrare $\exists v \in W$ (wRv e $\models_v A$)
  Scelgo v e dimostro $v \in W$ e wRv e $\models_v A$.
  Chiaro per K_1, K_2 e K_3.

· caso $\models_v B$: analogamente al caso $\models_v A$.

$\Leftarrow$: assumo $\models_w \Diamond A \vee \Diamond B$, ovvero $\models_w \Diamond A$ o $\models_w \Diamond B$, ovvero $\underline{\exists_v \in W (wRv \text{ e } \models_v A)}$ o $\underline{\exists v \in W (wRv \text{ e } \models_v B)}$ (H) e dimostro $\models_w \Diamond(A \vee B)$, ovvero $\exists u \in W (wRu \text{ e } \models_u A \vee B)$, ovvero $\exists u \in W (wRu \text{ e } (\models_u A \text{ o } \models_u B))$. Per H, procedo per casi:

· caso $\underline{\exists_v \in W (wRv \text{ e } \models_v A)}$. Sia v tale che $v \in W$ (K1), wRv (K2) e $\models_v A$. Quindi, $\models_v A$ o $\models_v B$ (K3). Devo dimostrare $\exists u \in W (wRu \text{ e } (\models_u A \text{ o } \models_u B))$. Scelgo v. Chiudo per K1, K2 e K3.

· caso $\underline{\exists_v \in W (wRv \text{ e } \models_v B)}$: analogamente al caso $\underline{\exists_v \in W (wRv \text{ e } \models_v A)}$.

4) th. $\models \Box (A \Rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \Rightarrow \Diamond B)$.

Siano F una struttura, $M = \langle W, R, I \rangle$ un modello basato su tale struttura e $w \in W$. Devo dimostrare $\models_w \Box (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Diamond A \Rightarrow \Diamond B)$. Assumo $\models_w \Box(A \Rightarrow B)$, ovvero $\forall v \in W (wRv \text{ implica } \models_v A \Rightarrow B)$ (H) e dimostro $\models_w \Diamond A \Rightarrow \Diamond B$. Assumo $\models_w \Diamond A$, ovvero $\exists_v \in W (wRv \text{ e } \models_v A)$ (K) e dimostro $\exists t \in W (wRt \text{ e } \models_t B)$. Per K, sia $v \in W$ (K1) t.c. wRv (K2) e $\models_v A$ (K3). Per H, K1 e K2 ho $\models_v A \Rightarrow B$. Quindi,* per K3 ho $\models_v B$ (K4). Scelgo v e dimostro $v \in W$ e wRv e $\models_v B$. Chiudo per K1, K2 e K4.

*il modus ponens conserva la validità!

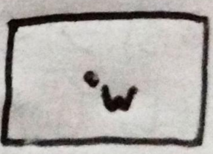
5) $\models \Diamond(A \to B) \to (\Box A \to \Diamond B)$

Siano F una struttura, $M = \langle W, R, I \rangle$ un modello basato su tale struttura e $w \in W$. Devo dimostrare $\models_w \Diamond(A \to B) \to (\Box A \to \Diamond B)$. Assumo $\models_w \Diamond(A \to B)$, ovvero $\exists v \in W (wRv$ e $\models_v A \to B)$ (H) e $\models_w \Box A$, ovvero $\forall u \in W (wRu$ implica $\models_u A)$ (K) e dimostro $\models_w \Diamond B$, ovvero $\exists t \in W (wRt$ e $\models_t B)$. Per H, sia $v \in W$ (H_1) t.c. wRv (H_2) e $\models_v A \to B$ (H_3). Scelgo v e dimostro $v \in W$ e wRv e $\models_v B$. Per K, ho wRv implica $\models_v A$. Quindi, per H_2, ho $\models_v A$. Quindi,* per H_3, ho $\models_v B$ (H_4). Chiudo per H_1, H_2 e H_4.

* il modus ponens preserva la validità!

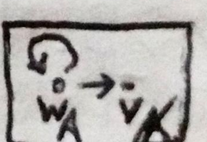
es. 1.2 del libro

1) $\not\models \Diamond \top$. Controesempio:



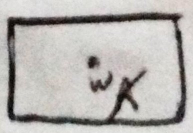
$\not\models_w \Diamond \top$

2) $\not\models \Diamond A \to \Box A$. Controesempio:



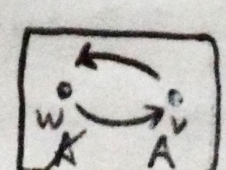
$\not\models_w \Diamond A \to \Box A$

3) $\not\models \Box A \to A$. Controesempio:



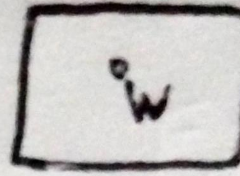
$\not\models_w \Box A \to A$

4) $\not\models \Box A \to \Box\Box A$. Controesempio:

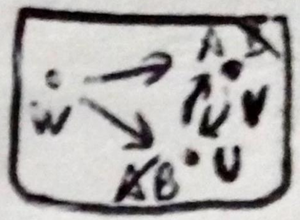


$\not\models_w \Box A \to \Box\Box A$

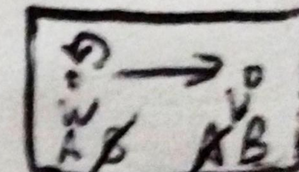
5) $\nvDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Diamond B)$

Controesempio:  $\nvDash_w \Box(A \to B) \to (\Box A \to \ldots$

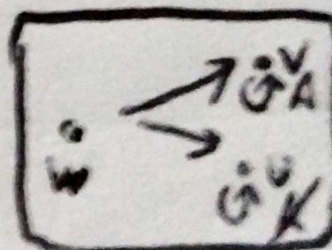
6) $\nvDash \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

Controesempio:  $\nvDash_w \Box(\Box A \to B) \vee \Box(\Box B \to A)$

7) $\nvDash \Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Box B)$

Controesempio:  $\nvDash_w \Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Box B)$

8) $\nvDash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$

Controesempio:  $\nvDash_w \Box(\Box A \to A) \to \Box A$