

Esercizi (non assegnati dal prof.) adattati dal corso del prof. Sacerdoti Coen

Definizioni preliminari

Numero dei simboli di una formula A

$\#_a(A)$ significa “il numero di occorrenze di a in A ”

“Il numero di simboli di A ” significa

$$\#_{p_i, \perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow}(A)$$

Altezza di una formula A

L’ “altezza” di una formula A , o $h(A)$, è:

$$h(p_i) = h(\perp) = 1$$

$$h(\neg A) = h(A) + 1$$

$$h(A \wedge B) = h(A \vee B) = h(A \rightarrow B) = \max(h(A), h(B)) + 1$$

dove $\max(a, b)$ significa “il numero maggiore fra a e b (o uno dei due a piacere se sono lo stesso numero)”

Bilanciamento di una formula A

p_i e \perp sono tutte e due formule bilanciate.

$\neg A$ è una formula bilanciata se e solo se lo è A .

$A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \rightarrow B$ sono formule bilanciate se e solo se $h(A) = h(B)$ e A è bilanciata e B è bilanciata.

Esercizi

Dimostrare per induzione strutturale sulle formule della logica proposizionale che:

1. l’altezza di una formula è sempre minore o uguale al numero dei suoi simboli;
2. se la formula non contiene connettivi binari, allora l’altezza e il numero dei simboli coincidono;
3. se la formula A è bilanciata e non contiene negazioni, allora il numero di simboli è $2^{h(A)} - 1$.