1) tr. $h(A) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(A)$

Per induzione strutturale sulla formula di logica proposizionale A:

- caso p_i: devo dimostrare $h(p_i) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(p_i)$, ovvero $1 \leq 1$. Ovvio.
- caso $\bot$: devo dimostrare $h(\bot) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(\bot)$, ovvero $1 \leq 1$. Ovvio.
- caso $\neg B$: assumo $h(B) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(B)$ (II) e devo dimostrare $h(\neg B) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(\neg B)$, ovvero $h(B)+1 \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(B)+1$. Per il puro principio di equivalenza delle disuguaglianze mi riduco a dimostrare $h(B) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(B)$. Ovvio per II.
- caso $B \wedge C$: assumo $h(B) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(B)$ (II1) e $h(C) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(C)$ (II2) e dimostro $h(B \wedge C) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(B \wedge C)$, ovvero $\max(h(B),h(C))+1 \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(B) + \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(C)+1$. Per il puro principio di equivalenza delle disuguaglianze, mi riduco a dimostrare $\max(h(B),h(C)) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(B)+\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(C)$. Sommando membro a membro II1 e II2, ottengo $h(B)+h(C) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(B)+\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(C)$ (H). Per le proprietà di max su $\mathbb{N}$, ottengo $\max(h(B),h(C)) \leq h(B)+h(C)$ (K). Per la proprietà transitiva di $\leq$, K e H ho $\max(h(B),h(C)) \leq \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(B)+\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\Rightarrow}(C)$.
- $B \vee C$: analogo a $B \wedge C$.
- $B \Rightarrow C$: analogo a $B \wedge C$.

2) th. $\#_{\wedge,\vee,\to}(A)=0 \to h(A) = \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(A)$

Per induzione strutturale sulla formula di logica proposizionale A:

- caso p_i: assumo $\#_{\wedge,\vee,\to}(p_i)=0$ (superfluo) e dimostro $h(p_i) = \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(p_i)$, ovvero $1=1$. Ovvio.
- caso $\bot$: assumo $\#_{\wedge,\vee,\to}(\bot)=0$ (superfluo) e dimostro $h(\bot) = \#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(\bot)$, ovvero $1=1$. Ovvio.
- caso $\neg B$: assumo $\#_{\wedge,\vee,\to}(B)=0 \to h(B)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(B)$ (II) e dimostro $\#_{\wedge,\vee,\to}(\neg B)=0 \to h(\neg B)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(\neg B)$. Assumo $\#_{\wedge,\vee,\to}(\neg B)=0$ (H) e dimostro $h(\neg B)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(\neg B)$, ovvero $h(B)+1=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(B)+1$. Per il primo principio di equivalenza delle uguaglianze, mi riduco a dimostrare $h(B)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(B)$. Per H, ho $\#_{\wedge,\vee,\to}(B)=0$. Quindi, per II, ho $h(B)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(B)$
- caso $B\wedge C$: assumo $\#_{\wedge,\vee,\to}(B)=0 \to h(B)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(B)$ (superfluo) e assumo $\#_{\wedge,\vee,\to}(C)=0 \to h(C)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(C)$ (superfluo) e dimostro $\#_{\wedge,\vee,\to}(B\wedge C)=0 \to h(B\wedge C)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(B\wedge C)$. Assumo $\#_{\wedge,\vee,\to}(B\wedge C)=0$ (H) e dimostro $h(B\wedge C)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(B\wedge C)$. Per H, ho $\#_{\wedge,\vee,\to}(B)+\#_{\wedge,\vee,\to}(C)+1=0$. ~~Assurdo~~ Quindi $h(B\wedge C)=\#_{p_i,\bot,\neg,\wedge,\vee,\to}(B\wedge C)$.
- caso $B\vee C$: analogo a $B\wedge C$.
- caso $B\to C$: analogo a $B\wedge C$.

c.v.d.

3) th. (A è bilanciata) $\wedge$ $\#_{\neg}(A)=0 \rightarrow \#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(A) = 2^{h(A)}-1$

Per induzione strutturale sulla formula di logica proposizionale A.

- caso p_i: assumo (p_i è bilanciata) $\wedge\ \#_{\neg}(p_i)=0$ (superfluo) e dimostro $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(p_i)=2^{h(p_i)}-1$, ovvero $1=2^1-1$, ovvero $1=1$. Chiaro.
- caso $\perp$: assumo ($\perp$ è bilanciata) $\wedge\ \#_{\neg}(\perp)=0$ (superfluo) e dimostro $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(\perp)=2^{h(\perp)}-1$, ovvero $1=2^1-1$, ovvero $1=1$. Chiaro.
- caso $\neg B$: assumo (B è bilanciata) $\wedge\ \#_{\neg}(B)=0 \rightarrow \#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B)=2^{h(B)}-1$ (superfluo) e dimostro ($\neg B$ è bilanciata) $\wedge\ \#_{\neg}(\neg B)=0 \rightarrow \#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(\neg B)=2^{h(\neg B)}-1$. Assumo ($\neg B$ è bilanciata) (superfluo), $\#_{\neg}(\neg B)=0$ (H) e dimostro $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(\neg B)=2^{h(\neg B)}-1$. Per H, ho $\#_{\neg}(B)+1=0$. Assurdo. Quindi $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(\neg B)=2^{h(\neg B)}-1$.
- caso $B\wedge C$: assumo (B è bilanciata) $\wedge\ \#_{\neg}(B)=0 \rightarrow \#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B)=2^{h(B)}-1$ (II1) e assumo (C è bilanciata) $\wedge\ \#_{\neg}(C)=0 \rightarrow \#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(C)=2^{h(C)}-1$ (II2) e dimostro ($B\wedge C$ è bilanciata) $\wedge\ \#_{\neg}(B\wedge C)=0 \rightarrow \#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B\wedge C)=2^{h(B\wedge C)}-1$. Assumo ($B\wedge C$ è bilanciata), ovvero $h(B)=h(C)$ (H_1), B è bilanciata (H_2) e C è bilanciata (H_3), e $\#_{\neg}(B\wedge C)=0$, ovvero $\#_{\neg}(B)+\#_{\neg}(C)=0$ (K), e dimostro $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B\wedge C)=2^{h(B\wedge C)}-1$, ovvero $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B)+\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(C)+1=2^{max(h(B),h(C))+1}-1$ ovvero $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B)+\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(C)=2^{max(h(B),h(C))}-1+2^{max(h(B),h(C))}-1$. Per H_1 mi riduco a dimostrare $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B)+\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(C)=2^{max(h(B),h(B))}-1+2^{max(h(C),h(C))}-1$, ovvero $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B)+\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(C)=2^{h(B)}-1+2^{h(C)}-1$. Per K, ho $\#_{\neg}(B)=0$ (K_1) e $\#_{\neg}(C)=0$ (K_2). Per H_2 e K_1, ho (B è bilanciata) $\wedge\ \#_{\neg}(B)=0$. Quindi, per II1, ho $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B)=2^{h(B)}-1$ (L_1). Per H_3 e K_2, ho C è bilanciata $\wedge\ \#_{\neg}(C)=0$. Quindi, per II2, ho $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(C)=2^{h(C)}-1$ (L_2). Sommando membro a membro L_1 e L_2, ho $\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(B)+\#_{p_i,\perp,\neg,\wedge,\vee,\rightarrow}(C)=2^{h(B)}-1+2^{h(C)}-1$

- caso $B \vee C$: análogo a $B \wedge C$.
- caso $B \to C$: análogo a $B \to C$.

c.v.d.