

# Argomenti di esame (a.a. 2022-23)

I numeri di pagina fanno riferimento alla numerazione riportata sulla pagine della versione PDF, e differiscono da quelli della versione cartacea.

## 1 Linguaggio modale e semantica

### 1.1 Linguaggio

- def. 1.1:  $\mathcal{L}^\Phi$ , alfabeto del linguaggio modale enunciativo (pag. 1);
- def. 1.2:  $Fm^\Phi$ , insieme delle formule ben formate di  $\mathcal{L}^\Phi$  (pag. 1);
- def. 1.3: simboli logici ausiliari (pag. 2);
- def.:  $lg(A)$ , lunghezza della formula  $A$  (pag. 2);
- def.:  $Sf(A)$ , insieme delle sottoformule di  $A$  (pag. 2);
- def.:  $A[D/p]$ , sostituzione uniforme di  $D$  al posto di  $p$  in una fbf  $A$  (pag. 2).

### 1.2 Semantica per $L^\Phi$

- 1.2.1 Strutture relazionali
  - def. 1.4:  $\mathcal{F}$ , struttura relazionale (pag. 3).
- 1.2.2 Modelli
  - def.:  $\mathcal{M}$ , ( $\mathcal{F}$ -)modello (pag. 4).
- 1.2.3 Verità e validità
  - def. 1.5:  $\mathcal{M} \vDash_w A$ ,  $A$  è vera in un mondo  $w$  di  $\mathcal{M}$  (pag. 4);
  - def. 1.6:  $\mathcal{M} \vDash A$ ,  $A$  è vera in un modello  $\mathcal{M}$  (pag. 4);
  - def. 1.7:  $\mathcal{F} \vDash A$ ,  $A$  è valida su una struttura  $\mathcal{F}$  (pag. 4);
  - def. 1.8:  $\vDash A$ ,  $A$  è valida (pag. 5);
  - def. 1.9:  $\mathcal{C} \vDash A$ ,  $A$  è valida su una classe di strutture  $\mathcal{C}$  (pag. 5);
  - def. 1.10:  $\Gamma \vDash_{\mathcal{C}} A$ ,  $A$  è conseguenza semantica di  $\Gamma$  rispetto a una classe di strutture  $\mathcal{C}$  (pag. 5);
  - def.: schema (pag. 5).

### 1.3 Schemi validi e non validi

- th.: validità delle tautologie classiche e di K (pag. 6).

### 1.4 Regole che conservano la validità

- th.: MP conserva la verità in un punto di un modello (pag. 7);
- th.: N conserva la verità in un modello (pag. 7);
- th.: SU conserva la validità su una struttura (pag. 8).

### 1.5 Cos'è una logica modale normale?

- def.: logica modale normale (pag. 9).

## 1.6 Chiusura riflessiva e transitiva

- def. 1.11:  $\square^n (\diamond^n)$ , applicare  $\diamond (\diamond)$   $n$  volte (pag. 10);
- def. 1.12:  $\mathcal{R}^n$ , poter accedere tramite  $\mathcal{R}$  in esattamente  $n$  passi (pag.10);
- def. 1.13:  $\mathcal{R}^*$ , chiusura riflessiva e transitiva di  $\mathcal{R}$  (pag. 10);
- lem. 1.14: sia  $S$  una relazione riflessiva e transitiva tale che  $\mathcal{R} \subset S$ . Allora  $\mathcal{R}^* \subset S$  (pag. 10);
- oss. 1: il lemma 1.14 ci dice che  $\mathcal{R}^*$  è la più piccola relazione riflessiva e transitiva che estende  $\mathcal{R}$ ;
- lem. 1.15:  $\square^n (\diamond^n)$  e  $\mathcal{R}^n$  (pag. 11).

## 2 Corrispondenza e non esprimibilità

- def. 2.1:  $A$  corrisponde a  $\mathcal{P}$  (pag. 13).

### 2.1 Risultati di corrispondenza

- th. 2.2: T corrisponde alla riflessività (pag. 15);
- th. 2.3: 4 corrisponde alla transitività (pag. 15);
- th. 2.4: D corrisponde alla serialità (pag. 15);
- th. 2.6: B corrisponde alla simmetria (pag. 16);
- th. 2.7: 5 corrisponde alla proprietà euclidea (pag. 16);
- th. 2.8: 2 corrisponde alla convergenza debole (pag. 16);
- th. 2.14: mnkj-Lemmon corrisponde alla proprietà mnkj-Lemmon (pag. 18).

### 2.2 Proprietà non esprimibili

- 2.2.1 Sottomodelli generati
  - def. 2.15: sottomodulo generato (pag. 19);
  - lem. 2.16: sottomodulo generato  $\mathcal{M}^v \vDash_z A$  sse  $\mathcal{M} \vDash_z A$  (pag. 19).
- 2.2.2 P-morfismi
  - def. 2.17: p-morfismo tra strutture (pag. 20);
  - def. 2.18: p-morfismo tra modelli (pag. 20);
  - lem. 2.19: p-morfismo fra modelli  $\mathcal{M}_1 \vDash_w A$  sse  $\mathcal{M}_2 \vDash_{f(w)} A$  (pag. 21);
  - def. 2.20: p-morfismo suriettivo (pag. 21);
  - def. 2.21: immagine p-morfa (pag. 21);
  - lem. 2.22: p-morfismo suriettivo fra modelli  $\mathcal{M}_1 \vDash A$  sse  $\mathcal{M}_2 \vDash A$  (pag. 21);
  - lem. 2.23: p-morfismo tra strutture implica p-morfismo fra modelli (p. 22);
  - lem. 2.24: p-morfismo suriettivo fra strutture (p. 22).
- 2.2.3 Proprietà non esprimibili
  - th. 2.25: la convergenza non è esprimibile (p. 23);
  - th. 2.26: la connessione non è esprimibile (p. 23);
  - th. 2.27: l'irriflessività non è esprimibile (p. 23);

– th. 2.28: l'antisimmetria non è esprimibile (p. 23).

### 3 Logiche modali normali

#### 3.1 La logica K

- def.:  $K$ , logica modale normale minimale (pag. 25);
- def.:  $L$ , logica modale normale (pag. 25);
- def. 3.1: dimostrazione in  $L$ , profondità, teorema (pag. 25).

#### 3.2 Alcune estensioni di K

- fig.: cubo delle logiche modali normali (pag. 31).

#### 3.3 Validità

- def.:  $\mathcal{F} \models L$ ,  $\mathcal{F}$  è una struttura per  $L$  (pag.33);
- def.:  $\mathcal{C}^L$ , classe delle strutture per  $L$  (pag. 33);
- def.:  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^L$ ,  $L$  è valida rispetto a  $\mathcal{C}$  (pag. 33);
- th. 3.8: validità di  $K$  (e completezza forte a lezione, entrambe senza dimostrazione) (pag. 34).

#### 3.4 Modalità

- def. 3.11: modalità (pag. 35).

### 9 Sequenti etichettati

#### 9.1 Nozioni introduttive

- def. 9.1: linguaggio etichettato (pag. 104);
- def. 9.2: sequente (pag. 105);
- def. 9.3: derivazione  $\Gamma \Rightarrow \Delta$  (pag. 105).

#### 9.2 Il calcolo G3.K

- tab. 9.1: regole logiche e sequenti iniziali (pag. 106);

#### 9.3 Alcune estensioni di G3.K

- G3.T, G3.K4, G3.B, G3.K5 (pag. 108-109);
- G3.D, G3.K2 (pag. 109,110).

#### 9.4 Elementi basi di metateoria

- def. 9.4: contesti, formule principali e formule attive (pag. 112);
- def. 9.5: lunghezza, profondità, n-derivabilità, ammissibilità e pp-ammissibilità (pag. 112);
- lem. 9.6:  $G3.L \vdash w : A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w : A$  (pag.112);

- def. 9.7: sostituzione etichette (pag.112);
- lem. 9.8: pp-ammissibilità regola sostituzione etichette (pag. 113).

## 9.5 Validità e completezza

- 9.5.1 Validità
  - def. 9.9:  $\mathcal{M}$ -realizzazione, verità di una formula, sequente verificato da  $\mathcal{M}$ -realizzazione, sequente  $L$ -valido (pag. 114);
  - th. 9.10: validità ( $G3.L \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$  implica  $\mathcal{C}^{\mathcal{L}} \vDash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ) (pag. 114).
- 9.5.2 Completezza
  - def. 9.11: ramo  $L$ -saturo (pag. 117);
  - def. 9.12: costruzione  $L$ -albero (pag. 118);
  - def. 9.13: modello da un ramo  $L$ -saturo (pag. 119);
  - lem. 9.14: chiamato in classe truth lemma (pag. 119);
  - th. 9.15: completezza ( $\mathcal{C}^{\mathcal{L}} \vDash \Gamma \Rightarrow \Delta$  implica  $G3.L \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ ) (pag. 120).

## 9.6 Proprietà strutturali

- lem. 9.16: pp-ammissibilità di  $LW$  e  $RW$  (pag. 121);
- cor. 9.17: ammissibilità necessitazione in  $G3.L$  (pag. 122);
- lem. 9.18: pp-invertibilità di tutte le regole di  $G3.L$  (pag. 122);
- th. 9.19: pp-ammissibilità di  $LC_R$ ,  $LC$  e  $RC$  (pag. 123);
- th. 9.20: ammissibilità regola cesura/taglio/cut (pag. 124).

## 9.7 Decidibilità

- def. 9.23: derivazione minimale (pag. 127);
- prop. 9.24: etichette di una derivazione minimale (pag. 127);
- lem. 9.25: permutazione delle regole (pag. 128);
- cor. 9.26:  $L\Box$  in una derivazione minimale (pag. 129).