06/02/23

SEMANTICA LOGICA CLASSICA

attribuire valore a $\underbrace{\text{variabili enunciative}}_{\text{insieme } \Phi}$. Stabiliamo 1 funzione

$I: \Phi \rightarrow \{0,1\}$ oppure $I \subseteq \{\Phi\}$

$\notin$ $\in$

usaremo questa notaz.

Siamo in logica classica => ogni enunciato è necessariamente o VERO o FALSO

Def. $I \models A$ "A è vero rispetto a interpretazione I"

Def. $I \models p_i$ sse $p_i \in I$ o $I(p_i) = 1$

Def. $I \not\models \bot$

Def. $I \models \neg A$ sse $I \not\models A$

Def. $I \models A \cap B$ sse $I \models A \cap I \models B$

Def. $I \models A \cup B$ sse $I \models A \cup I \models B$

Def. $I \models A \Rightarrow B$ sse $I \not\models A \cup I \models B$ $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \cup B)$

TEOREMA: se $I(p_i) = I'(p_i)$ $\forall p_i \in A$

allora $I \models A$ sse $I' \models A$

dim: per induzione strutturale su A.

CASO p_i:

devo dimostrare $I \models p_i$ sse $I' \models p_i$

ovvero $I(p_i) = 1$ sse $I'(p_i) = 1$. OVVIO

CASO $\bot$:

devo dimostrare $I \models \bot$ sse $I' \models \bot$. OVVIO

CASO $\neg B$:

devo dimostrare $I \models \neg B$ sse $I' \models \neg B$

sse $\underset{I(B)=0}{I \not\models B}$ $\underset{\text{sse}}{\text{sse}}$ $\underset{I'(B)=0}{I' \not\models B}$. OVVIO

CASO $C \wedge B$:

devo dimostrare $I \models (C \wedge B)$ sse $I' \models (C \wedge B)$

sse $I(C \wedge B) = 1$ sse $I' \models (C \wedge B)$

sse $I(C) = 1 \cap I(B) = 1$ sse $I'(C) = 1 \cap I'(B) = 1$

OVVIO

CASO $B \cup C$

devo dimostrare $I \models (B \cup C)$ sse $I' \models (B \cup C)$

sse $I \models B \cup I \models C$ sse $I' \models B \cup I' \models C$.

OVVIO.

CASO $B \to C$

devo dimostrare $I \models (B \to C)$ sse $I' \models (B \to C)$

sse $I \not\models B \cup I \models C$ sse $I' \not\models B \cup I' \models C$

OVVIO.

ES

$I \models A$ sse $I \models \neg^{2k} A$

Dimostrazione per induzione strutturale su K

CASO $K=0$

d.d. $I \models A$ sse $I \models A$ OVVIO

CASO $K=n+1$ $\forall n \in N$

d.d. $I \models A$ sse $I \models \neg^{2(n+1)} A$

per induzione so che

$I \models A$ sse $I \models \neg^{2n} A$

$I \models \neg^{2(n+1)} A$ sse $I \models \neg^{2n+2} A$ sse $I \models \neg\neg(\neg^{2n}) A$

sse $I \not\models \neg(\neg^{2n}) A$ sse $I \models \neg^{2n} A$ OVVIO

ES

$\models (\neg A \cup \neg B) \longleftrightarrow \neg(A \cap B)$

1) $I \models (\neg A \cup \neg B)$ sse $I \models \neg A$ oppure $I \models \neg B$

$\left.\begin{array}{l} I \models A \text{ sse } I \not\models A \\ I \models B \text{ sse } I \not\models B \end{array}\right\}$

2) $I \models \neg(A \cap B)$ sse $I \not\models A \cap B$ sse $\overbrace{I \not\models A \text{ e } I \not\models B}$

Def. A è *soddisfatta* da I se $I \models A$

Def. A è *NON soddisfatta* da I se $I \not\models A$

Def. A è *soddisfacibile* se $\exists I.(I \models A)$

Def. A è *valida* se $\forall I.(I \models A)$ $\models A$

Def. A è *conseguenza logica* di Γ dove $\Gamma \subseteq Fm_{\Phi}$

sse $\forall I.(I \models \Gamma$ allora $I \models A)$ $\Gamma \models A$

TEOREMA di DEDUZIONE:

$\Gamma, A \models B$ sse $\Gamma \models A \rightarrow B$

dim.

$\Rightarrow$] assumo $\Gamma, A \models B$ ovvero $I \models \Gamma, A$ allora $I \models B$

d.d. $\boxed{I \models \Gamma \text{ allora } I \models A \rightarrow B}$

$$I' \models \Gamma \begin{cases} I' \models A & I' \models A \rightarrow B \\ I' \not\models A & I' \models A \rightarrow B \end{cases}$$

$\Leftarrow$] assumo $\Gamma \models A \rightarrow B$ ovvero $\forall I (I \models \Gamma$ allora $I \models A \rightarrow B)$

ovvero $\forall I (I \models \Gamma$ allora $(I \not\models A$ oppure $I \models B))$

d.d. $\boxed{\forall I.(I \models \Gamma, A \text{ allora } I \models B)}$

$\forall I.(I' \models \Gamma, A$ allora $I' \models B)$ sse $\Gamma \models A \rightarrow B$

perché non può rendere falso A

08/02/23

ES $\models (A \cap B) \rightarrow A$

VIA DIRETTA: assumo antecedente e dimostro conseguente

Sia I t.c. $I \models A \cap B$, mostro che $I \models A$

$I \models A \cap B$ sse $I \models A$ e $I \models B$ OVVIO

PER ASSURDO: assumo per assurdo $\exists I \, (I \not\models (A \cap B) \rightarrow A)$

ovvero $I \models A \cap B$ e $I \not\models A$

Ma $I \models A \cap B$ sse $I \models A$ e $I \models B$ ASSURDO

TEOREMA: $\Gamma \models A$ sse $\Gamma, \neg A$ è insoddisfacibile

($\Rightarrow$) $\forall I \, (I \models \Gamma$ allora $I \models A)$ — ! antecedente (1) o vero conseg. (2)

(1) $\exists B \in \Gamma$ t.c. $I \not\models B \rightsquigarrow \Gamma, \neg A$ è insoddisf. da I

(2) $I \models A \rightsquigarrow F, \neg A$ è insodd. da I

($\Leftarrow$) $\forall I \, (I \not\models \Gamma, \neg A)$

d.d. $\Gamma \models A$ ovvero $\forall I \, (I \models \Gamma$ allora $I \models A)$

09/02/23

LOGICA MODALE PROPOSIZIONALE

Alfabeto $\Phi = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ variabili enunciative

$\bot, \neg, \land, \lor, \rightarrow, \Box, \Diamond$ operatori

$(\ )$ simboli ausiliari

Linguaggio definito così:

1) se $p_i \in \Phi$ allora $p_i \in Fm$
2) $\bot \in Fm$
3) se $A \in Fm$ allora $\neg A, \Box A, \Diamond A \in Fm$
4) se $A, B \in Fm$ allora $(A \cap B), (A \cup B), (A \rightarrow B) \in Fm$
5) nient'altro $\in Fm$

$\top \equiv \bot \rightarrow \bot \qquad (A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

Definire **lunghezza** formule

- $lg(p_i) = lg(\bot) = 0$
- $lg(\neg A) = lg(\Box A) = lg(\Diamond A) = lg(A) + 1$
- $lg(A \cap B) = lg(A \cup B) = lg(A \rightarrow B) = lg(A) + lg(B) + 1$

Dimostrazione per induzione:

1. BASE $P(\bot)$, $P(p_i)$

2. PASSO ASSUMO $P(A)$, $P(B)$

   MOSTRO $\left[\begin{array}{l} P(\neg A) \\ P(A \wedge B), P(A \vee B), P(A \to B) \end{array}\right.$

   $P(\Box A)$, $P(\Diamond A)$

3. CONCLUDO

$$\forall A \in Fm\,(P(A))$$

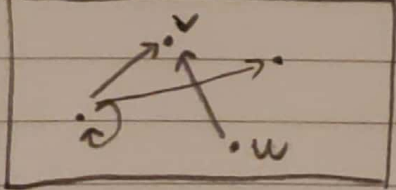
SEMANTICA di Kripke

STRUTTURA (RELAZIONALE) o FRAME

$$\boxed{\mathcal{F} = \langle W, R \rangle}$$

- W è insieme NON vuoto di mondi / punti
- $R \subseteq W \times W$ è la RELAZIONE di ACCESSIBILITÀ
- usiamo w v, u per i mondi
- wRv significa "v è accessibile da w" o "w vede v"

$\mathcal{F}$



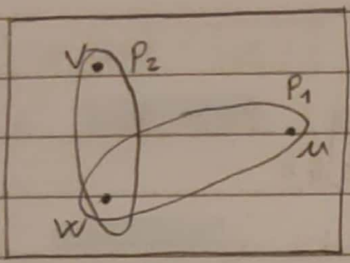
wRv

insieme punti $\qquad$ coppie punti $\qquad$ interpretazione

Definiamo un **MODELLO** $M = \langle W, R, I \rangle$

$\boxed{I : \Phi \to \mathcal{P}(W)}$ ovvero $\boxed{I(p_i) \subseteq W}$

ovvero $I : W \to (V : \Phi \to \{0,1\})$



M è basato su F se

$$M = \langle M, R, I \rangle \quad e \quad F = \langle W, R \rangle$$

$V \equiv I$

Definiamo **VERITÀ** di A in un punto w di M

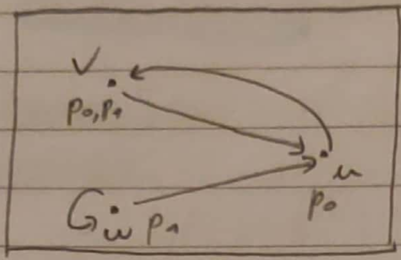
$$\models^{M}_{w} A \qquad (\models_w A)$$

- $\models_w p_i$ sse $w \in I(p_i)$
- $\not\models_w \bot$
- $\models_w \neg A$ sse $\not\models_w A$
- $\models_w A \cap B$ sse $\models_w A \cap \models_w B$
- $\models_w A \cup B$ sse $\models_w A \cup \models_w B$
- $\models_w A \to B$ sse $\not\models_w A \cup \models_w B$

- $\models_w \Box A$ sse $\forall v \in W (w R v$ implica $\models_v A)$
- $\models_w \Diamond A$ sse $\exists v \in W (w R v$ e $\models_v A)$

esempio:

$F = \langle \{w, v, u\}, \{\langle w,w \rangle, \langle u,v \rangle, \langle v,u \rangle, \langle w,u \rangle\} \rangle$



$I(p_0) = \{v, u\}$

$I(p_1) = \{w, v\}$

$\models_w \Box p_0$ sse $\forall x \in W (wRx \supset \models_x p_0)$

sse $\cancel{\models_w p_0}$ e $\models_u p_0$ FALSO

$\models_v \Box p_0$ sse $\models_u p_0$ VERO

↖ tutto ciò che vede v

$\models_u \Box \bot$ sse $\cancel{\models_v \bot}$ FALSO

↘ vero solo se u non vede nulla

VALIDITÀ

W è insieme mondi di M

$w \in W$ dove

A è **VERA** in M ($\models^M A$) sse A è vera in ogni $w \in M$

A è **VALIDA in un frame** $\mathcal{F}$ sse $\forall M$ basato su $\mathcal{F}$ ($\models^M A$)

A è **VALIDA** ($\models A$) sse $\forall \mathcal{F} (\mathcal{F} \models A)$

A è **VALIDA in una classe** C di frame sse $\forall \mathcal{F} \in C (\mathcal{F} \models A)$

CONSEGUENZA LOGICA

$\boxed{\Gamma \models_C A}$ sse $\forall w \in M$ dove M è basato su $\mathcal{F} \in C$,

$\models_w^M \Gamma$ allora $\models_w^M A$

riepilogo

VERITÀ $\models_w^M A$, $\models^M A$ vero in 1 o + mondi

VALIDITÀ $\mathcal{F} \models A$ valida in 1 frame

$C \models A$ " " classe di frame

$\models A$ " tutti i frame

ES | x CASA

① $\models \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$

② $\models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Sia $F = \langle W, R \rangle$ e $M = \langle W, R, I \rangle$, $w \in W$

① so che $\models^M_w \Box(A \wedge B)$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v A \wedge B)$

d.d.

$\models_w \Box A \wedge \Box B$ ovvero $\models_w \Box A$ e $\models_w \Box B$

Dimostro $\models_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v A)$

OVVIO

Dimostro $\models_w \Box B$ " $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v B)$

OVVIO

ipotesi ci dice che $\models_v A \wedge B$ ovvero $\models_v A$ e $\models_v B$ $\forall v \in W$

② so che $\models^M_w \Box(A \to B)$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v A \to B)$

d.d.

$\models^M_w \Box A \to \Box B$

so che $\models^M_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v A)$

d.d.

$\models^M_w \Box B$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models_v B)$

per ipotesi so che $\forall v \in W (\models_v A \to B)$

ovvero $\not\models_v A$ oppure $\models_v B$

ma so che $\forall v \in W$ $\models_v A$ quindi $\models_v B$

13/02/2023

es. in classe

$\models \Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$

assumo $\models^M_w \Box A \wedge \Box B$ ovvero $\models^M_w \Box A$ e $\models^M_w \Box B$

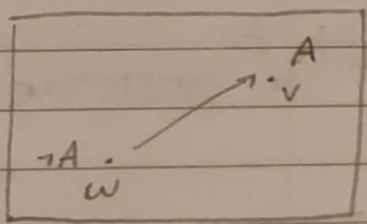
ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models^M_v A)$ e
$\forall v \in W (wRv$ implica $\models^M_v B)$

d.d. $\models^M_w \Box(A \wedge B)$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models^M_v A \wedge B)$

ovvero $\forall v \in W (\models^M_v A$ e $\models^M_v B)$ ovvio

$\not\models \Box A \rightarrow A$ farne altri sul libro è utile

controesempio:



assumo $\models^M_w \Box A$ ovvero $\forall v \in W (wRv$ implica $\models^M_v A)$
quindi non possiamo affermare che è sempre vero in tutti i $v \in W$

MODUS PONENS

$$\boxed{\frac{\models A \qquad \models A \to B}{\models B}}$$

$\not\Downarrow \qquad \Uparrow$

$$\frac{\models_w A \qquad \models_w A \to B}{\models_w B}$$

caso di 1 MODELLO
(tutti i mondi di 1 MODELLO)

$$\frac{\models_w A \text{ e } (\not\models_w A \text{ oppure } \models_w B)}{\models_w B}$$

non può essere $\not\models_w A$ e $\models_w$

REGOLA di NECESSITAZIONE

$$\boxed{\frac{\models^M A}{\models^M \Box A}}$$

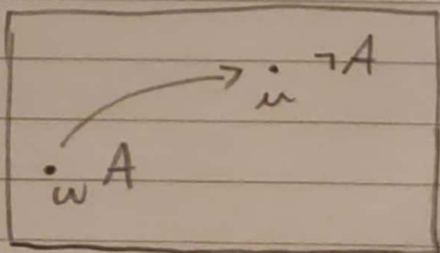
si preserva sul MODELLO

$\forall_{v \in W} (\models_v A)$

$\forall_{v \in W} (\models_v \Box A)$

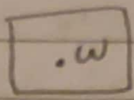
NON si preserva su 1 mondo

$$\cancel{\frac{\models_w^M A}{\models_w^M \Box A}}$$

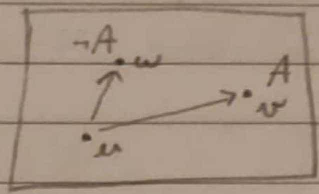


es. 1.2 pag 24 libro

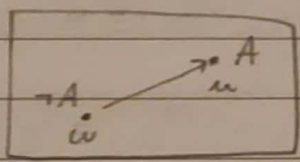
(1) $\not\models \Diamond \top$



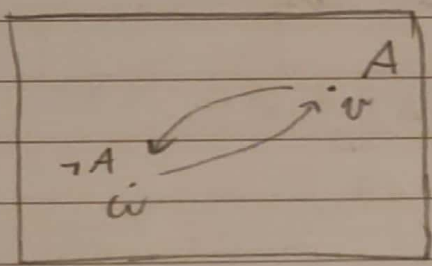
(2) $\not\models \Diamond A \to \Box A$



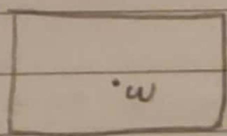
(3) $\not\models \Box A \to A$



(4) $\not\models \Box A \to \Box\Box A$



??? (5) $\not\models \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Diamond B)$



??? (6) $\not\models \Box(\Box A \to B) \lor (\Box B \to A)$

(7) $\not\models \Box(A \lor B) \to (\Box A \lor \Box B)$

(8) $\not\models \Box(\Box A \to A) \to \Box A$

15/02/23

regola SOSTITUZIONE

$A[B/p]$ A con B al posto di p

CASI:

- $q[B/p] \equiv \begin{cases} q & \text{se } q \not\equiv p \\ B & \text{se } q \equiv p \end{cases}$
- $\bot[B/p] \equiv \bot$
- $* \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$, $*C[B/p] \equiv *(C[B/p])$
- $\circ \in \{\land, \lor, \to\}$, $(C \circ D)[B/p] \equiv C[B/p] \circ D[B/p]$

TR: la validità su $\mathcal{F}$ (generica struttura) è chiusa sotto sostituzione uniforme

$$\frac{\mathcal{F} \models A}{\mathcal{F} \models A[B/p]}$$

NON vero in un modello: è possibile $M \models A$ e $M \not\models A[B/p]$

Assumiamo $M \models p$ ma $M \not\models \bot$

$M \not\models p[\bot/p]$

$$(\alpha \to \beta) \longleftrightarrow (\neg \beta \to \neg \alpha)$$

DIMOSTRAZIONE: PER CONTRAPPOSIZIONE

assumo $\not\models A[B/p]$ mostro $\not\models A$

$\not\models^M_w A[B/p]$ dove $M = \langle W, R, I \rangle$

$\Gamma_B = \{v \text{ t.c. } v \in W \text{ e } \models^M_v B\}$

$M' = \langle W, R, I' \rangle \qquad I'(q) = \begin{cases} I(q) & \text{se } q \not\equiv p \\ \Gamma(B) & \text{se } q \equiv p \end{cases}$

$\forall C \in Fm, \forall k \in W \qquad \models^M_k C[B/p] \text{ sse } \models^{M'}_k C$

Dimostro per induzione su C:

CASO BASE: $\models^M_k q = \begin{cases} q \equiv p & \models^M_k B \text{ sse } \models^{M'}_k q \\ q \not\equiv p & \models^{M'}_k q \qquad k \in I(q) \text{ sse } k \in I'(q) \end{cases}$

CASO $\wedge$: $\models^M_k (D \wedge E)[B/p] \overset{?}{\text{sse}} \models^{M'}_k D \wedge E$

sse

$\models^M_k D[B/p] \wedge E[B/p]$

sse

$\models^M_k D[B/p]$ e $\models^M_k E[B/p]$

sse

$\models^{M'}_k D$ e $\models^{M'}_k E$ (per ip. ind.)

sse

$\models^{M'}_k D \wedge E$

IDEM per $\vee$ e $\to$ e $\neg$ continua...

$\models^{M}_{k} (\Box D)[B/p]$ sse $\models^{M'}_{k} \Box D$

sse

$\models^{M}_{k} \Box(D[B/p])$

sse

$\forall u\, (kRu \supset \models^{M}_{u} D[B/p])$

sse

$\forall u\, (kRu \supset \models^{M'}_{u} D)$

sse

$\models^{M'}_{k} \Box D$

IDEM per $\Diamond$ qed

Definizione di LOGICA
LOGICHE MODALI NORMALI

$\Gamma \subseteq Fm$

① $TAUT \in \Gamma$

② $K \in \Gamma$, $K := \square(A \to B) \to (\square A \to \square B)$

③ Γ chiuso sotto MP $\dfrac{A \in \Gamma \quad A \to B \in \Gamma}{B \in \Gamma}$

④ Γ chiuso sotto regola necessitazione $\dfrac{A \in \Gamma}{\square A \in \Gamma}$

(⑤ Γ chiuso sotto sostituzione uniforme $\dfrac{A \in \Gamma}{A[^B/_p]\, \Gamma}$)

ridondante

ASSIOMI: $\vdash TAUT$ $\vdash K$

REGOLE: $\dfrac{\vdash A \quad \vdash A \to B}{\vdash B}$ modus ponens

$\dfrac{\emptyset \vdash A}{\emptyset \vdash \square A}$ necessitazione

16/02/23

dimostrazione

$K := \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

assumo $\models^M_w \Box(A \to B)$ ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v A \to B$)

ovvero $\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v \neg A \vee B$)
ovvero $\forall v \in W$ (wRv " $\models^M_v \neg A$ o $\models^M_v B$)

d.d. $\models^M_w \Box A \to \Box B$ assumo $\models^M_w \Box A$ ovvero
$\forall v \in W$ (wRv implica $\models^M_v A$)

quindi so $\forall v \in W$

$$\frac{\models^M_v A \qquad \models^M_v A \to B}{\models^M_v B} \text{ per MP}$$

NOTAZIONE

$F \rhd P$ $\quad F$ gode di P

Def. CORRISPONDENZA

$A \in Fm$ corrisponde a una proprietà P (di R)
sse

$$\forall F(F \models A \text{ sse } F \rhd P)$$

$\uparrow$
A è valido in F

$T := \Box A \to A$ corrisponde a RIFLESSIVITÀ

$$\forall F(F \models \Box A \to A \quad \text{sse} \quad \forall w \in F\ (wRw))$$

$\supset$ assumo $F \models \Box A \to A$ e mostro $\forall w \in F(wRw)$

$$\frac{\models^M_u \Box p \to p \qquad I \text{ t.c. } \models_u \Box p, \ I(p) = \{v \in W : uRv\}}{\models^M_u p}$$

quindi uRu

$\subset$ assumo $\forall w(wRw)$ e mostro $F \models \Box A \to A$

$\models_u \Box A$ mostro $\models_u A$

$$\frac{\begin{matrix}\forall x \in W(uRx \supset \models_x A) \\ uRu \supset \models_u A \qquad uRu\end{matrix}}{\models_u A}$$

per contrapposizione

$\supset$ ASSUMO F NON riflessivo e MOSTRO $F \not\models \Box A \to A$

ovvero $\exists x \exists M (\not\models_x^M \Box p \to p)$

$\exists u (\neg uRu)$

$\models_x \Box p \quad \not\models_x p$

$\neg(vRv) \quad I(p) : \{z \in W, vRz\}$

per assurdo assumo $\forall w (wRw)$

$\subset \quad \models_u \Box A \quad \not\models_u A$

w

$\Box A, \neg A \lightning A$

$D := \Box A \to \Diamond A$ corrisponde a SERIALITÀ

$\forall w \exists u (wRu)$

$F \models \Box A \to \Diamond A \longleftarrow$ sse

$\supset$ assumo $\models_w \Box p \to \Diamond p \quad I(p) = \{v \in W \text{ t.c. } wRv\}$

$$\frac{\models_w \Box p \to \Diamond p \qquad \models_w \Box p}{\models_w \Diamond p}$$

ovvero $\exists u \in W (wRu \text{ e } \models_u p)$

quindi $\exists u \in W (wRu)$

$\subset$ assumo $\forall w \exists u (wRu)$

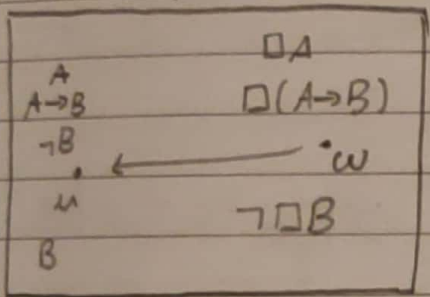
mostro $F \models_w \Box A \to \Diamond A$

assumo $\models_w \Box A$ e mostro $\models_w \Diamond A$

$\forall v \in W (wRv \supset \models_v A)$

quindi $\exists u \in W (wRu \text{ e } \models_u A)$

$K := \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$



$\not\models_w (\Box(A \to B) \cap \Box A) \to \Box B$

ES. x CASA

$4: \Box A \to \Box\Box A$, $F \models 4$ sse $\forall x,y,z\,(xRy$ e $yRz \supset xRz)$

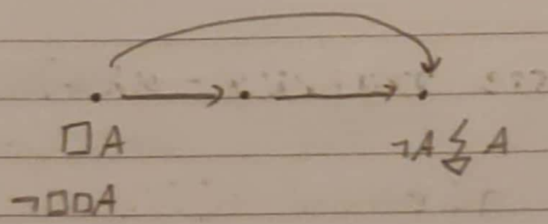
$\supset$ assumo $\models_w \Box p \to \Box\Box p$ $\quad I(p) = \{v \in W \mid wRv\}$

$$\frac{\models_w \Box p \to \Box\Box p \qquad \models_w \Box p}{\Box\Box p}$$ ovvero $\forall v \in W\,(wRv$ implica $\models_v \Box p)$

ovvero $\forall v \in W\,(wRv$ implica $\forall x \in W$ t.c. vRx implica $\models_x p)$

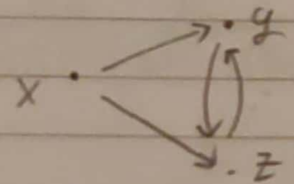
$\subset$ assumo $\forall x,y,z\,(xRy$ e $yRz \supset xRz)$
mostro $F \models_w \Box A \to \Box\Box A$. Assumo $\models_w \Box A$ e mostro $\models_w \Box\Box A$

⊂ x ASSURDO

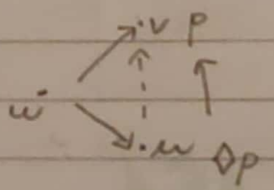


5: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ prop. euclidea
B: $A \to \Box\Diamond A$ prop. simmetrica

5: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ sse $\forall xyz\ (xRy \text{ e } xRz \supset yRz)$



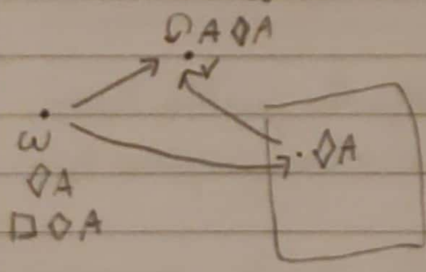
⊃ assumo $F \models \Diamond p \to \Box\Diamond p$



$\models_w \Diamond p$ $\quad I(p) = \{v\}$

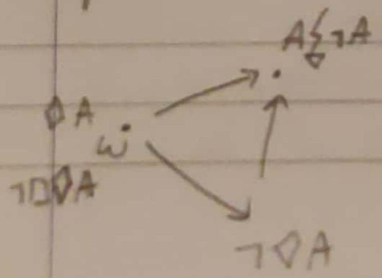
$\models_w \Box\Diamond p$ per MP

⊂ assumo $\forall xyz(xRy \text{ e } xRz \supset yRz)$ e mostro $\models \Diamond A \to \Box\Diamond A$
assumo $\models_w \Diamond A$



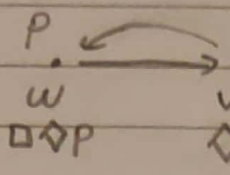
insieme di altri eventuali mondi visti da w

⊂ per ASSURDO. Assumo $\models_w \Diamond A$ e $\not\models_w \Box\Diamond A$



B: $A \to \Box\Diamond A$ sse $\forall xy(xRy \supset yRx)$

$\supset$ assumo $\vDash p \to \Box\Diamond p$

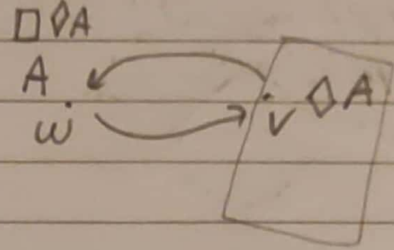


dato che p è vero solo in w

$I(p) = \{w\}$

$\subset$ assumo $\forall x,y(xRy \supset yRx)$

mostro $\vDash A \to \Box\Diamond A$



$\vDash_w A$ e mostro $\vDash_w \Box\Diamond A$

NOZIONI:

$\Box^n A$ $\quad \Box^0 A \equiv A$, $\Box^{n+1} A \equiv \Box(\Box^n A)$

$wR^n v$ $\quad wR^0 v$ sse $w = v$

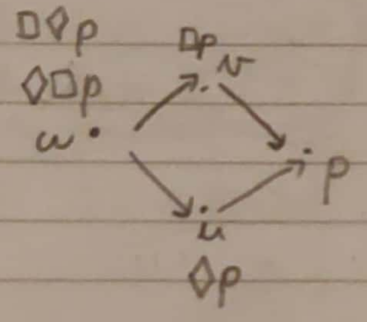
$wR^{n+1} v$ sse $\exists x(wR^n x$ e $xRv)$

idem per **$\Diamond^n A$**

CONVERGENZA DEBOLE

2: $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$ sse $\forall xyz(xRy \text{ e } xRz \supset \exists t(yRt \text{ e } zRt))$

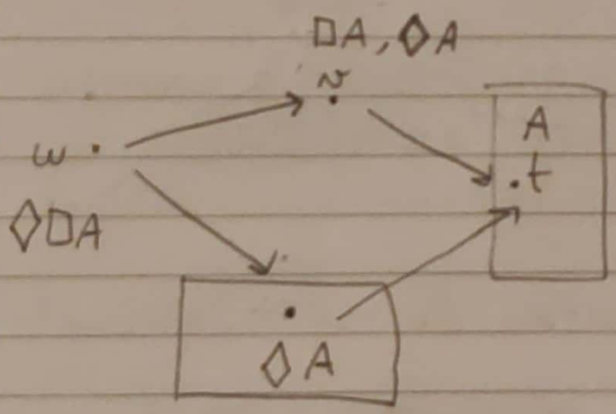
$\supset$ assumo $\dfrac{\models_w \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \qquad \models_w \Diamond\Box p}{\models_w \Box\Diamond p}$



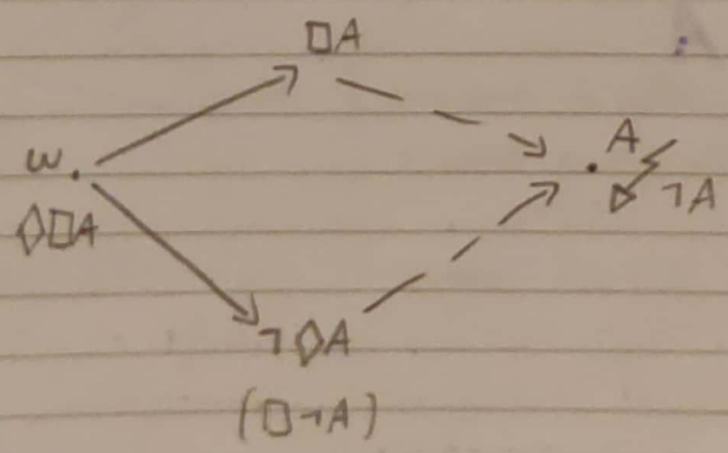
$I(p) = \{x \in W \mid vRx\}$

dato che p è vero solo in ciò che vede v

$\subset$ assumo $\models_w \Diamond\Box A$ mostro $\Box\Diamond A$



$\subset$ per ASSURDO $\models_w \Diamond\Box A$, $\not\models_w \Box\Diamond A$

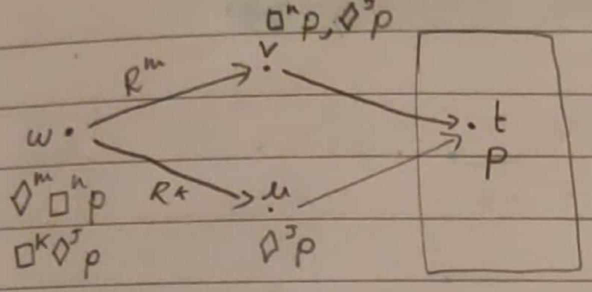


22/02/23

Lemmon

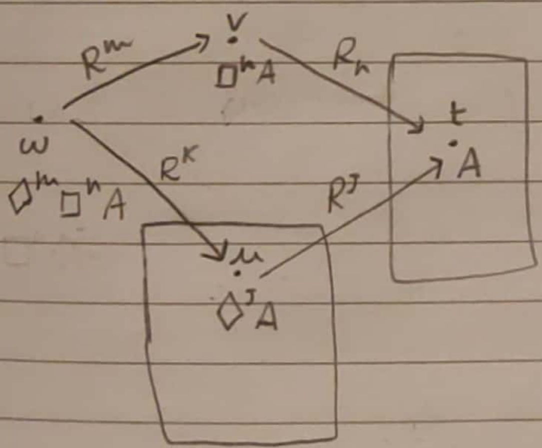
$F \models \Diamond^m \Box^n A \to \Box^k \Diamond^j A$ sse $\forall xyz(xR^m y \text{ e } xR^k z \supset \exists t(yR^n t \text{ e } zR^j t))$

$\supset$ assumo $\models_w \Diamond^m \Box^n p \to \Box^k \Diamond^j p$ e mostro



$I(p) = \{z \in W \mid vR^n z\}$

$\subset$ assumo $\forall x,y,z(xR^m y \text{ e } xR^k z \supset \exists t(yR^n t \text{ e } zR^j t))$
e mostro
$\models_w \Diamond^m \Box^n A \to \Box^k \Diamond^j A$, assumo $\models_w \Diamond^m \Box^n A$



Possiamo usare Lemmon per dimostrare un secco di robe:

T: $\Box A \to A \equiv \Diamond^0 \Box^1 A \to \Box^0 \Diamond^0 A$

4: $\Box A \to \Box\Box A \equiv \Diamond^0 \Box^1 A \to \Box^2 \Diamond^0 A$

$\forall wvu(wR^0 v \text{ e } wR^1 u \supset \exists t(vR^0 t \text{ e } uR^0 t))$ ovvero
$\forall wvu(w=v \text{ e } wRu \supset \exists t(v=t \text{ e } u=t))$ ovvero
$\forall w(wRw)$ dato che $w=v=t=u$ FIGO!

Sottomodelli generati

[wR^*v sse $\exists n (wR^n v)$ con $n \in \mathbb{N}^+$ (stella di Kleene)]

Dato $M = \langle W, R, I \rangle$, il sottomodello generato da $x \in W$

$$M^x = \langle W^x, R^x, I^x \rangle \text{ dove } W^x = \{y \mid xR^*y\}$$

$$R^x = R \cap (W^x \times W^x)$$

$$I^x(p) = I(p) \cap W^x$$

Lemma sottomodello generato

$\forall M, \forall x \in W^{y \in W}, \forall A \in Fm^{\Phi}$ $\vDash^M_x A$ sse $\vDash^{M^y}_x A$

DIMOSTRAZIONE per INDUZIONE sulla struttura di A

- Sia $A \equiv p$ mostro $\vDash^M_x p$ sse $\vDash^{M^y}_x p$

$$\begin{array}{ccc} \vDash^M_x p & \text{sse} & \vDash^{M^y}_x p \\ \text{sse} & & \text{sse} \\ x \in I(p) & \text{sse} & x \in I^y(p) \end{array}$$

- Sia $A \equiv \bot$ mostro $\nvDash^M_x \bot$ sse $\nvDash^{M^y}_x \bot$

- Sia $A \equiv B \cap C$ mostro $\vDash^M_x B \wedge C$ sse $\vDash^{M^y}_x B \wedge C$

suppongo

$$\begin{array}{ccc} \vDash^M_x B \wedge C & \text{sse} & \vDash^{M^y}_x B \wedge C \\ \text{sse} & & \text{sse} \\ \vDash^M_x B & \overset{IH}{\text{sse}} & \vDash^{M^y}_x B \\ \text{e} & & \text{e} \\ \vDash^M_x C & \overset{IH}{\text{sse}} & \vDash^{M^y}_x C \end{array}$$

• Sia $A \equiv B \cup C$ mostro $\models^{M}_{x} B \cup C$ sse $\models^{M^y}_{x} B \cup C$

assumo

$$\begin{array}{ccc}
\models^{M}_{x} B \cup C & \text{sse} & \models^{M^y}_{x} B \cup C \\
\text{sse} & & \text{sse} \\
\models^{M}_{x} B & \overset{IH}{\text{sse}} & \models_{x} B \\
\circ & & \circ \\
\models^{M}_{x} C & \overset{IH}{\text{sse}} & \models_{x} C
\end{array}$$

• Sia $A \equiv B \to C$ mostro $\models^{M}_{x} B \to C$ sse $\models^{M^y}_{x} B \to C$

assumo

$$\begin{array}{ccc}
\models^{M}_{x} B \to C & \text{sse} & \models^{M^y}_{x} B \to C \\
\text{sse} & & \text{sse} \\
\not\models^{M}_{x} B & \overset{IH}{\text{sse}} & \not\models^{M^y}_{x} B \\
\circ & & \circ \\
\models^{M}_{x} C & \overset{IH}{\text{sse}} & \models^{M}_{x} C
\end{array}$$

• Sia $A \equiv \neg B$ mostro $\models^{M}_{x} \neg B$ sse $\models^{M^y}_{x} \neg B$

$$\begin{array}{ccc}
\text{sse} & & \text{sse} \\
\not\models^{M}_{x} B & \overset{IH}{\text{sse}} & \not\models^{M^y}_{x} B \ldots
\end{array}$$

• Sia $A \equiv \Box B$ assumo $\forall z \in W^y \models^{M}_{z} B$ sse $\models^{M^y}_{z} B$

d.d. $\models^{M}_{x} \Box B$ sse $\models^{M^y}_{x} \Box B$

$(\forall z \in W (xRz \supset \models^{M}_{z} B))$ sse $(\forall z \in W^y (xRz \supset \models^{M^y}_{x} A))$

$\supset$ sia $z \in W^y$ t.c. xRz d.d. $\models^{M^y}_{z} B$
Visto che xRz, allora $\models^{M}_{z} B$. Quindi per IH $\models^{M^y}_{z} B$

$\subset$ sia $z \in W$ t.c. xRz d.d. $\models^{M}_{z} B$. Visto che xRz, quindi xR^*z.
Quindi, $z \in W^y$. Quindi dato che $xR^y z$ (per ipotesi) e $\models^{M}_{z} B$.
Quindi per IH $\models^{M^y}_{z} B$

• Sia $A \equiv \Diamond B$ $\forall z \in W \left(\models_z^M B \text{ sse } \models_z^{M^y} B \right)$ (IH)

d.d.

$$\models_x^M \Diamond B \text{ sse } \models_x^{M^y} \Diamond B$$

$\supset$ assumo $\models_x^M \Diamond B$ ovvero $\exists w \in W (xRw \text{ e } \models_w^M B)$

mostro $\models_x^{M^y} \Diamond B$

so che $w \in W^y$ e $\models_w^M B$

per IH ho $\models_w^{M^y} B$

$\subset$ assumo $\models_x^{M^y} \Diamond$ sse $\underbrace{\exists t \in W^y (xR^y t}$ e $\underbrace{\models_t^{M^y} B)}_{\downarrow IH}$

$$\exists t \in W (xRt \text{ e } \models_t^M B)$$

sse

$$\models_x^M \Diamond B$$

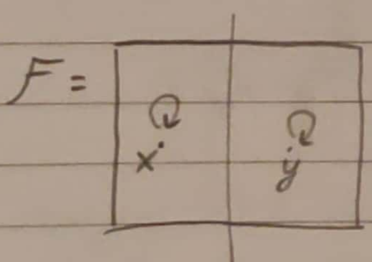
TR CONVERGENZA NON É ESPRIMIBILE

$\forall x, y \exists z (xRz \text{ e } yRz)$ $\nexists$ formula modale per esprimerlo

DIM X ASSURDO

$\nexists A \in Fm$ t.c. $\forall F (F \models A \text{ sse } F$ é convergente$)$

assumo $\exists A$ corrisponde a CONV



$F \not\models A$ quindi ho 2 casi

$\exists M^x \not\models_x^{M^x} A$

$\exists M^y \not\models_y^{M^y} A$

ma dimostriamo che entrambi i casi creano una contraddizione

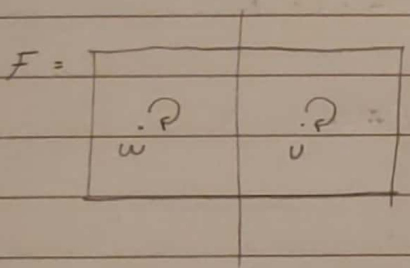
$\not\models_x^{M} A$ sse $\not\models_x^{M^x} A$ $\quad$ ↯ assurdo

$F^x \models A \rightarrow \models_x^{M^x} A$ $\quad$ ← è così per entrambi i punti

TR CONNESSIONE NON É ESPRIMIBILE

$\forall w,v\,(wRv \lor vRw \lor w=v)$ $\quad$ dim. x assurdo

$\nexists A \in Fm$ t.c. $\forall F\,(F \models A$ sse F è convergente)



$F \not\models A$

$\not\models_w^{M} A$ sse $\not\models_w^{M^w} A$ $\quad$ ↯ ASSURDO

$F^w \models A \rightarrow \models_w^{M^w} A$

27/02/23

P-MORFISMO tra STRUTTURE

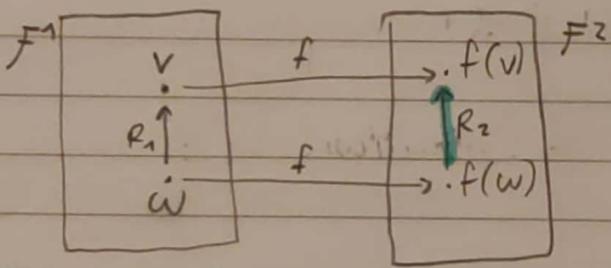
$F_1 = \langle W_1, R_1 \rangle$ $\qquad$ $F_2 = \langle W_2, R_2 \rangle$

è una funzione $f: W_1 \to W_2$
$\forall x \in W_1 \; \exists!\, y \in W_2, \langle x, y \rangle$

Condizioni per P-Morfismo

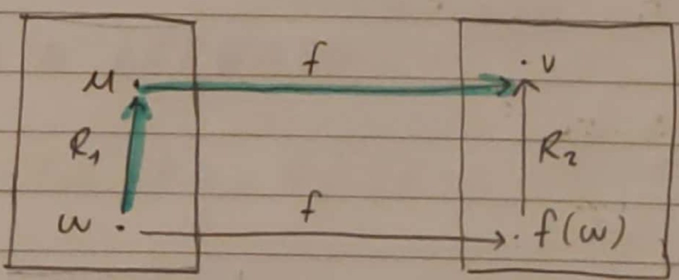
① FORTH CONDITION

$\forall w, v \in W_1 \, (wRv \supset f(w) R_2 f(v))$



② BACK CONDITION

$\forall w \in W_1, \forall v \in W_2 \, (f(w) R_2 v \supset \exists u \in W_1 \, (w R_1 u \text{ e } f(u) = v))$



P-MORFISMO TRA MODELLI

M_1 $\qquad$ M_2

$f: W_1 \to W_2$ soddisfa prime 2 condizioni e in più

3 $\forall w \in W_1 \, (w \in I_1(p)$ sse $f(w) \in I_2(p))$

LEMMA Dato f P-MORFISMO tra M_1 e M_2

$\forall x \in W_1 \, (\models_x^{M_1} A$ sse $\models_{f(x)}^{M_2} A)$

Dimostriamo per induzione strutturale su A.

- se $A \equiv p$: OVVIO per 3
- se $A \equiv \bot$: OVVIO (il $\bot$ è falso ovunque)
- se $A \equiv B \wedge C$: d.d. $\models_x^{M_1} B \wedge C$ sse $\models_{f(x)}^{M_2} B \wedge C$

per IH so $\begin{cases} \models_x^{M_1} B \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} B \\ \models_x^{M_1} C \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} C \end{cases}$

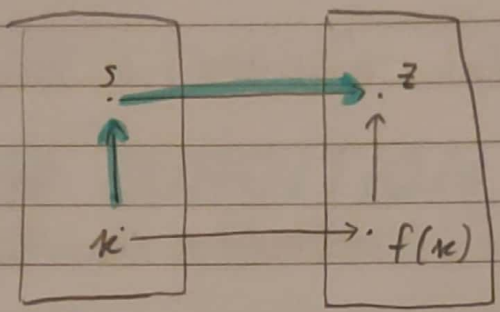
$\models_x^{M_1} B \wedge C$ sse $\begin{cases} \models_x^{M_1} B \overset{IH}{\text{ sse }} \models_{f(x)}^{M_2} B \\ \models_x^{M_1} C \text{ sse } \models_{f(x)}^{M_2} C \end{cases}$ sse $\models_{f(x)}^{M_2} B \wedge C$

idem per disgiunzione e implicazione

• se $A \equiv \Box B$

$\supset$ assumo* $\models^{M_1}_{x} \Box B$ sse $\forall y \in W_1 \, (x R_1 y \supset \models^{M_1}_{y} B)$

d.d. $\models^{M_2}_{f(x)} \Box B$, ovvero $\forall z \in W_2 \, (f(x) R_2 z \supset \models^{M_2}_{z} B)$



grazie a BACK CONDITION

so che $\models^{M_1}_{s} B \overset{IH}{\text{sse}} \models^{M_2}_{f(s)} B$

$\hookrightarrow z$

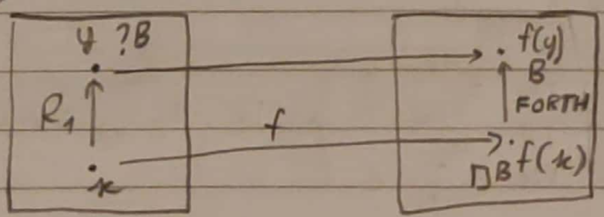
modo alternativo

$\supset$ d.d. $\models^{M_2}_{f(x)} \Box B$ sse $\forall z \in W_2 \, (f(x) R_2 z \supset \models^{M_2}_{z} B)$

per BC e assunzione * lo dimostro

↓ creo freccia ↓ so che $\Box B$ è vero in x

$\subset$ assumo $\models^{M_2}_{f(x)} \Box B$, d.d. $\models^{M_1}_{x} \Box B$ ovvero $\forall y \in W_1 \, (x R y \supset \models^{M_1}_{y} B)$

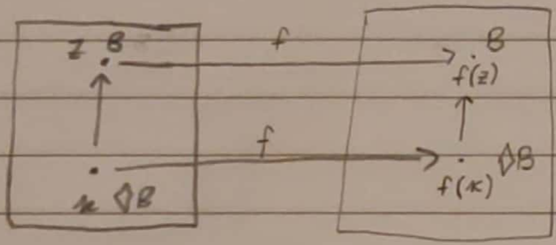


sse $\forall z \in W_2 \, (f(x) R_2 z \supset \models^{M_2}_{z} B)$

• se $A \equiv \Diamond B$

$\supset$ assumo $\models^{M_1}_{x} \Diamond B$ sse $\exists z \in W\,(x R_1 z$ e $\models^{M_1}_{z} B)$

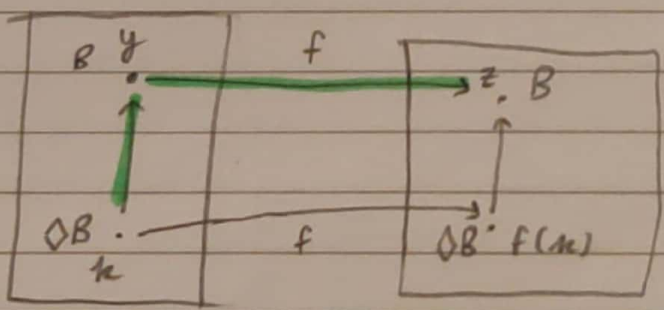
mostro $\models^{M_2}_{f(x)} \Diamond B$



per assunzione ho la freccia da x a z.
per Forth Condition ho le altre 3 frecce.
per IH ho $\models^{M_2}_{f(z)} B$
quindi ho $\models^{M_2}_{f(x)} \Diamond B$ fine

$\subset$ assumo $\models^{M_2}_{f(x)} \Diamond B$ sse $\exists z \in W\,(x R_2 z$ e $\models^{M_2}_{z} B)$

mostro $\models^{M_1}_{x} \Diamond B$



per BC

per IH so che $\models^{M_1}_{y} B$ dato che $z = f(y)$ e $\models^{M_2}_{z} B$

quindi sapendo $x R_1 y$ so che $\models^{M_1}_{x} \Diamond B$

01/03/23

RIPASSO FUNZIONI

$f: D \to C$ **INIETTIVA** se $\forall d_1, d_2 \in D \; d_1 \neq d_2 \supset f(d_1) \neq f(d_2)$

SURIETTIVA se $\forall c \in C \; \exists d \in D$ t.c. $f(d) = c$

applicata ai p-morfismi:

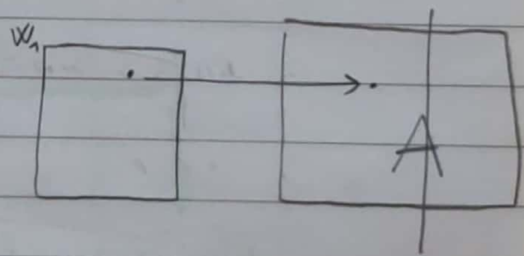
$f: W_1 \to W_2$ se è suriettiva $\forall x \in W_2 \; \exists y \in W_1 \; (x = f(y))$

Lemma P-MORF. SURIET. tra MODELLI

Se $f: W_1 \to W_2$ è p-morfismo suriettivo
ALLORA $\models^{M_1} A$ sse $\models^{M_2} A$

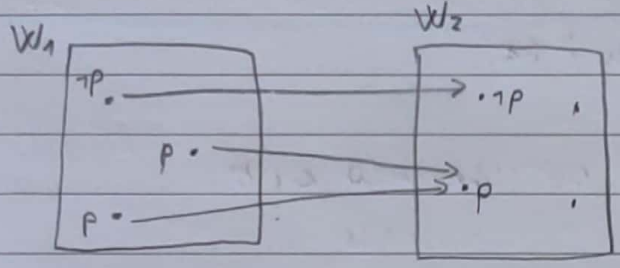
DIM $\models^{M_1} A \quad \forall x \in W_1 (\models^{M_1}_x A) \quad \forall z \in W_1 (\models^{M_1}_z A$ sse $\models^{M_2}_{f(z)} A)$

$W_2 = f(W_1) \quad \forall u \in W_2 (\models^{M_2}_u A)$



Lemma Dato f p-morfismo tra strutture F_1 e F_2

$\exists$ p-morfismo tra modelli per ciascun F_2-modello



(qui NON serve suriettività)

$$I_1(p) = \{x \in W_1 : f(x) \in I_2(p)\}$$

lemma P-MORFISMO SURIET. tra STRUTT.

Dato f p-morfismo suriettivo tra strutture F_1 e F_2

se $F_1 \models A$ allora $F_2 \models A$

DIM $\times$ contrapposizione

assumo $F_2 \not\models A$, quindi $\exists M_2 \in F_2$ $(\not\models^{M_2} A) \Rightarrow \exists x \in W_2 (\not\models^{M_2}_x A)$
quindi per il lemma precedente

$\exists M_1 \in F_1 (\not\models^{M_1} A)$ dato che è suriettivo so che $x = f(y)$ per qualche $y \in W_1$

quindi $\not\models^{M_1}_y A$

RICORDA:
$f: F_1 \to F_2$ è P-MORF. SUR. allora $F_1 \models A \supset F_2 \models A$

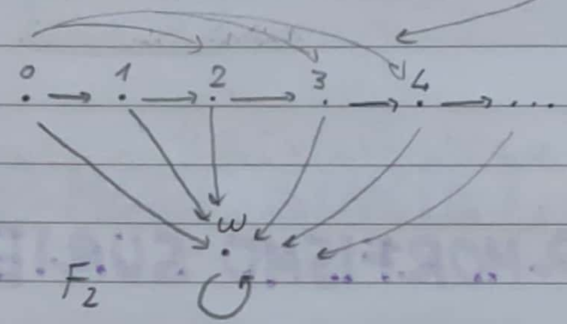
TR. IRRIFLESSIVITÀ è INESPRIMIBILE

$\forall w \neg (wRw)$ $(*)$

per ASSURDO
assumo che A corrispondo a $(*)$

ci sarebbero anche queste frecce transitive, MA non ci interessano

$F_1 = \langle \mathbb{N}, < \rangle$



f è P-MORFISMO
$f(n) = w \ \forall n \in \mathbb{N}$

per ogni n, K t.c. $n < K$ $f(n) R f(K)$, vero $\forall n, K$ perché wRw

d.d. $\exists y \in W_1$ xRy e $w = f(y)$ (BACK CONDITION)

p-morfismo è suriettivo perché F_2 ha solo 1 mondo

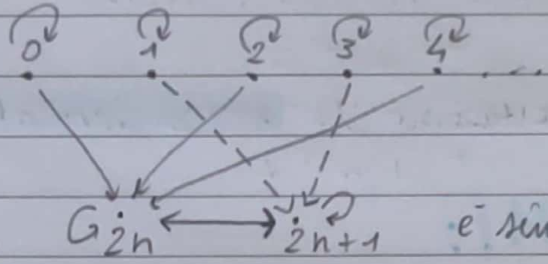
$$\frac{F_1 \models A}{F_2 \models A \ \lightning \ F_2 \not\models A}$$ per lemma P-M suriett. tra strutture

dato che wRw

$\forall w, v \, (wRv \text{ e } vRw \supset w = v) \quad (+)$

TR. ANTISIMMETRIA NON È ESPRIMIBILE

$F_1 = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$



F_2 è simmetrica

assumo che A corrisponda a $(+)$, $\dfrac{F_1 \models A}{F_2 \models A}$ ↯ $F_2 \not\models A$

CONCLUSA PARTE SULLA SEMANTICA

02/03/23

CALCOLO ASSIOMATICO

Unica regola: MODUS PONENS $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$

Assiomatizzeremo la logica modale K

ASSIOMI:

- TAUT : tutte le tautologie
- K : $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
- Def. $\Diamond$: $\Diamond A \longleftrightarrow \neg \Box \neg A$

REGOLE:

- necessitazione: $\dfrac{\emptyset \vdash A}{\emptyset \vdash \Box A}$ N
- modus ponens: $\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$ MP

Introduciamo cos'è una derivazione

Def DERIVAZIONE

Una derivazione in L di A a partire da Γ ($\Gamma \vdash A$) è una successione FINITA di formule $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ t.c.:

$$\alpha_i \begin{cases} \cdot \text{ è assioma di } L \\ \cdot \in \Gamma \text{ (ipotesi)} \\ \cdot \text{ è ottenuta da } \alpha_j \text{ (e } \alpha_k\text{)} \\ \quad \text{per } j,k < i \text{ attraverso regola di } L \end{cases}$$

$\alpha_n = A$

Def ($\vdash_L A$)

diciamo che A è un teorema se A è derivabile da $\emptyset$ ($\emptyset \vdash_L A$, ovvero dimostrazione di A)

I teoremi fondamentali sono VALIDITÀ e COMPLETEZZA.

$$\Gamma \vdash_k A \text{ sse } \Gamma \vdash A$$

VALIDITÀ $\longrightarrow$

COMPLETEZZA $\longleftarrow$

es. DERIVAZIONE $\vdash_K \Box\top$ $\quad (\vdash \Box(\bot \to \bot))$

$$\frac{\vdash \bot \to \bot}{\vdash \Box(\bot \to \bot)}\ N$$

ripasso:

K $:= \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

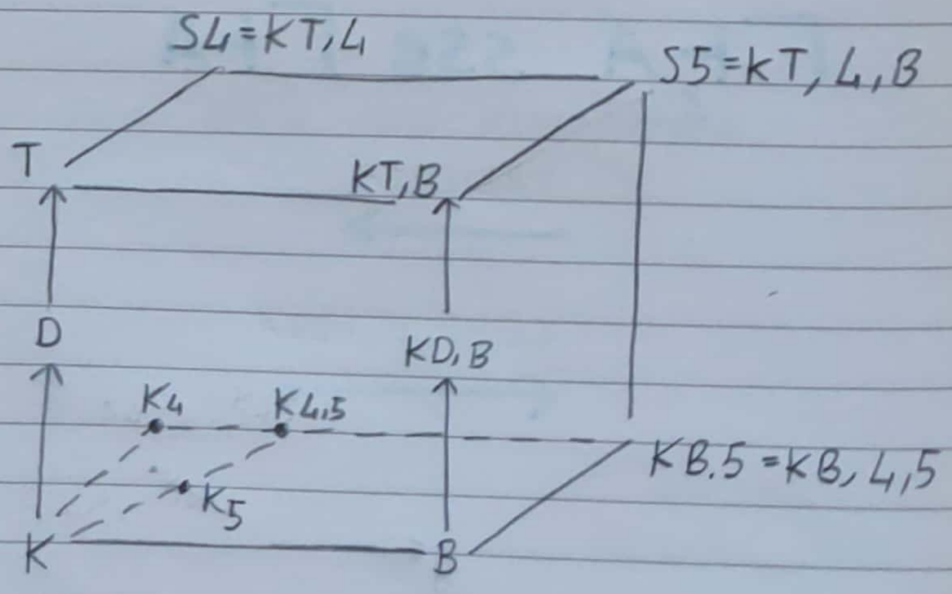
D $:= \Box A \to \Diamond A$ (logica D: logica K + assioma D)

T $:= \Box A \to A$

4 $:= \Box A \to \Box\Box A$

5 $:= \Diamond A \to \Box\Diamond A$

B $:= A \to \Box\Diamond A$



CUBO DELLE LOGICHE ASSIOMATIZZABILI CON D, T, 4, 5, B

08/03/23

TEORIA DELLA DIMOSTRAZIONE

CALCOLI PER LA LOGICA PROPOSIZIONALE

LK   sequente: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ Γ, Δ sequenze di calcoli

ASSIOMI $A \Rightarrow A$ (unico assioma)

REGOLE

- $\dfrac{}{\bot \Rightarrow}\ L\bot$ left bottom, regola a zero premesse

- $\dfrac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_1 \wedge A_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\wedge_{i \in \{1,2\}}$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Pi \Rightarrow \Sigma, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, A \wedge B}\ R\wedge$

- $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Pi \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ L\vee$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_1 \vee A_2}\ R\vee_{i \in \{1,2\}}$

- $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Sigma}{A \to B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ L\to$ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}\ R\to$

REGOLE STRUTTURALI

- $\dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}\ LP$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ RP$ permutazione

MA usiamo **MULTINSIEMI** anziché liste
↳ non è pedante ed è più comodo

in questo esempio, A_i è la FORMULA ATTIVA
Γ è il CONTESTO
$A_1 \wedge A_2$ è la FORMULA PRINCIPALE

virgola a SX : CONGIUNZIONE

virgola a DX : DISGIUNZIONE

- INDEBOLIMENTO (WEAKENING)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} LW \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} RW$$

- CONTRAZIONE (CONTRACTION) serve perchè usiamo multiinsiemi

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} LC \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} RC$$

esempio:

dimostrazione bottom-up

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{A, A \Rightarrow A} LW}{A \Rightarrow A \to A} R\to}{\Rightarrow A \to (A \to A)} R\to$$

- CESURA/TAGLIO (CUT) teorema principale

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} cut$$

$\Gamma \vdash_{NK} A$ sse $\vdash_{LK} \Gamma \Rightarrow A$

$$\frac{\begin{matrix}\Gamma & & \Delta \\ \vdots & & \vdots \\ A & & B\end{matrix}}{A \wedge B} \qquad \frac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Delta \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta \Rightarrow A \wedge B} \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow A}$$

CALCOLO LJ (LOGICA INTUIZIONISTA)

Uguale al calcolo LK ma con il vincolo che il succedente contiene o 0 o 1 formula

CALCOLO G3

Assorbiamo weakening e contrazione nelle regole logiche

ASSIOMI AGGIUNTI: $p, \Gamma \Rightarrow \Delta, p$ (con questo eliminiamo weak.)

per eliminare la contrazione riscriviamo:

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \land B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\land \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow A, B}{\Gamma \Rightarrow A, A \land B} R\land$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \lor B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\lor \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \lor B} R\lor$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\to \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B} R\Rightarrow$$

⇨ TUTTE LE REGOLE SONO INVERTIBILI

20/03/2023

G3C

- $\boxed{\vdash_{G3C} \Gamma \Rightarrow \Delta}$ sse $\exists$ albero di sequenti t.c.
  1. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è la radice (parte più in basso)
  2. le foglie sono sequenti iniziali o istanze di L⊥
  3. l'albero cresce secondo le regole di G3C

- $h(D)$ = altezza (o profondità) della derivazione
  = numero nodi di 1 dei rami più lunghi di D

- Formula principale = occorre nella conclusione
  " attive = occorrono nella premessa
  Contesti = multiinsiemi delle formule che vengono copiate da premessa a conclusione

Def. Una regola $\frac{S_1 \dots S_n}{S} R$ è AMMISSIBILE in G3C sse

se $\vdash_{G3C} S_1 \dots \vdash_{G3C} S_n$ allora $\vdash_{G3C} S$

- $\vdash_{G3C}^{n} \Gamma \Rightarrow \Delta$ sse $\exists$ derivazione D t.c. $h(D) \leq n$ del seq. $\Gamma \Rightarrow \Delta$

Def. $\frac{S_1 \dots S_n}{S} R$ è AMMISSIBILE PRESERVANDO la PROFONDITÀ ovvero PP-AMMISSIBILE sse

se $\vdash^n S_1 \dots \vdash^n S_k$ allora $\vdash^n S$

↳ va bene anche se h(D) diminuisce, basta che non cresca

TR. le regole $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ LW e $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ RW sono PP-AMMISSIBILI

DIM. per induzione su $h(D)$ dove $\dfrac{D}{\Gamma \Rightarrow \Delta} R$

- CASO BASE $h(D)=1$, ovvero albero fatto da 1 solo nodo

$$\begin{cases} \vdash^1 p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', p \\ \vdash^1 A, p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', p \end{cases} \qquad \begin{cases} \vdash^1 \bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \\ \vdash^1 A, \bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \end{cases}$$

- CASI INDUTTIVI $h(D) = K+1$

IH = teorema vale $\forall D' (h(D') \leq K)$

$$\vdash^{K+1} \dfrac{\vdash^{K} B, C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{B \wedge C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'} L\wedge$$

per IH $\exists$ D di

$$\dfrac{A, B, C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{A, B \wedge C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}$$ con $h=K$

$$\dfrac{\Gamma' \Rightarrow \Delta', B \qquad \Gamma' \Rightarrow \Delta', C}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', B \wedge C} R\wedge \qquad \dfrac{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta', B \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta', C}{A, \Gamma' \Rightarrow \Delta', B \wedge C}$$

LEMMA

$L\neg$ e $R\neg$ sono AMMISSIBILI

$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ (derivabile)

$\vdash A \to \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \dfrac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\bot}{A \to \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\to$$

$\vdash A, \Gamma \Rightarrow \Delta$

$\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, A \to \bot$

$$\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot} RW}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to \bot} R\to$$

22/03/2023

es. $\vdash^n A \cap B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ allora $\vdash^n A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (invertibilità)

TR. le regole $\dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ LC e $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ RC

sono PP-AMMISSIBILI

Dimostrazione per induz simultanea su $h(D)$

CASO BASE: $h(D) = 1$

$A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta$ è iniziale

$$\left.\begin{array}{l} p, p, \Gamma \Rightarrow \Delta', p \\ A, A, \Gamma', p \Rightarrow \Delta', p \end{array}\right\} \text{applicando contraz. ottengo ancora sequenti iniziali}$$

CASO $h(D) = K+1$ per IH so che LC e RC sono PP-AMMISSIBILI su derivazioni di profondità $\leq K$

$$\dfrac{\qquad\qquad}{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta} R$$

1. A è principale in R
2. A NON è principale in R

2. $$\dfrac{\vdash_k A, A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad (\vdash_k A, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2)}{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta} R \qquad \dfrac{\vdash_k A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \quad (\vdash_k A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2)}{\vdash_{k+1} A, \Gamma \Rightarrow \Delta} R$$

IH IH

1. $A = B \cap C$

$A = B \cup C$

$A = B \rightarrow C$

$$\dfrac{\vdash_k B, C, B \wedge C, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash_{k+1} B \wedge C, B \wedge C, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\wedge \quad \xrightarrow{\text{PP-INV}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash_k B, C, B, C, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash_k B, C, C, \Gamma \Rightarrow \Delta} IH}{\vdash_k B, C, \Gamma \Rightarrow \Delta} IH}{B \wedge C, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\wedge$$

$$\vdash^k B\vee C,\Gamma \Rightarrow \begin{cases}\vdash B,\Gamma\Rightarrow\Delta\\ \vdash C,\Gamma\Rightarrow\Delta\end{cases}$$

$$\vdash^k \dfrac{B,B\vee C,\Gamma\Rightarrow\Delta \qquad C,B\vee C,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\vdash^{k+1} B\vee C, B\vee C,\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

PP-INV $\qquad\qquad$ PP-INV

$$\dfrac{\dfrac{\vdash^k B,B,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\vdash^k B,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,IH \qquad \dfrac{\vdash^k C,C,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\vdash^k C,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,IH}{\vdash^{k+1} B\vee C,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,L\vee$$

$$\vdash^k \dfrac{B\to C,\Gamma\Rightarrow\Delta,B \qquad C,B\to C,\Gamma\Rightarrow\Delta}{B\to C,\underline{B\to C},\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

PP-INV

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B\to C,\Gamma\Rightarrow\Delta,B}{\vdash^k \Gamma\Rightarrow\Delta,B,B}\,PP\text{-}INV}{\vdash^k \Gamma\Rightarrow\Delta,B}\,IH \qquad \dfrac{\vdash^k C,C,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\vdash^k C,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,IH}{\vdash^{k+1} B\to C,\Gamma\Rightarrow\Delta}\,L\to$$

23/03/2023

ELIMINAZIONE di CUT

TR. la regola del taglio

$$\dfrac{\overbrace{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}^{D_1} \quad \overbrace{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}^{D_2}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ CUT$$

è DERIVABILE

lunghezza di A - num. connettivi

Dim. per induz. lessicografica su $\langle \ell(A), \text{profondità del taglio} \rangle$

$\text{profondità del taglio} = h(D_1) + h(D_2)$

3 CASI:
1. D_1 o D_2 ha profondità 1
2. A non è principale in almeno 1 premessa (D_1 e/o D_2)
3. A è principale in entrambe le premesse

① ipotizziamo $h(D_1) = 1$

1) $p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', p, A$
2) $p, \Gamma' \Rightarrow \Delta, p$
3) $\perp, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A$

1) $$\dfrac{p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', p, A \qquad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{p, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, p}$$

è 1 sequente iniziale perché c'è un atomo da entrambe le parti

2) $$\dfrac{p, \Gamma' \Rightarrow \Delta, p \qquad p, \Pi \Rightarrow \Sigma}{p, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \dfrac{p, \Pi \Rightarrow \Sigma}{p, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ LW\ e\ RW$$

indebolendo la premessa di destra ottengo la stessa conclus.

3) $$\dfrac{\perp, \Gamma' \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\perp, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \dfrac{}{\perp, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ L\perp$$

ipotizziamo $h(D_2) = 1$

$$\dfrac{\dfrac{D_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot} \qquad \dfrac{}{\bot, \Pi \Rightarrow \Sigma}\, L\bot}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

per questo caso dobbiamo usare un piccolo lemma:

Lemma: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\, R\bot$ è ammissibile (anche PP)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\, R\bot}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\, LW \text{ e } RW$$

② A non è principale in D_1 o D_2. Ipotizziamo non lo sia in D_1

$$\dfrac{\dfrac{\overbrace{\Gamma' \Rightarrow \Delta', A}^{D_{11}} \qquad \overbrace{\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', A}^{D_{12}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\, R \qquad \overbrace{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}^{D_2}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$\leadsto$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{D_{11}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', A} \qquad \dfrac{D_2}{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma}\, IH_2 \qquad \dfrac{\dfrac{D_{12}}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', A} \qquad \dfrac{D_2}{A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\, R$$

③ A è principale in D_1 e D_2.

$\boxed{A \equiv B \wedge C}$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma \Rightarrow A, B} \qquad \overset{D_{12}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B \wedge C}\, R\wedge \qquad \dfrac{\overset{D_{21}}{B, C, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{B \wedge C, \Pi \Rightarrow \Sigma}\, L\wedge}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{12}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, C} \qquad \dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B} \qquad \overset{D_2}{B, C, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{C, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\, IH_1}{\Gamma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma}\, IH_1}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\, LC \text{ e } RC$$

$\boxed{A \equiv B \vee C}$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, C}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B \vee C}\, R\vee \qquad \dfrac{\Pi, B \Rightarrow \Sigma \qquad C, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Pi, B \vee C \Rightarrow \Sigma}\, L\vee}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, C \qquad \Pi, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta, C}\, IH1 \qquad C, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Sigma, \Delta}\, IH}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma, \Delta}\, LC \text{ e } RC$$

$A \equiv B \to C$

$$\dfrac{\dfrac{B,\Gamma \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B\to C}\, R\to \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, B \qquad C,\Pi \Rightarrow \Sigma}{B\to C, \Pi \Rightarrow \Sigma}\, L\to}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, B \qquad B,\Gamma \Rightarrow \Delta, C}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Sigma, C}\, \mathrm{IH}_1 \qquad C,\Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma,\Pi,\Pi \Rightarrow \Delta,\Sigma,\Sigma}\, \mathrm{IH}_1}{\Gamma,\Pi \Rightarrow \Delta,\Sigma}\, LC \text{ e } RC$$

27/03/2023

CALCOLI ALLA GENTZEN x LE LOGICHE MODALI

G3.Kg

G3.C + $\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Box A}$ LR□ $\quad \Box\Gamma = \{\Box A : A \in \Gamma\}$

essendo in G3C, ogni istanza di una tautologia è derivabile

$(\vdash_K A$ sse $\models A)$ sse $G3.Kg \vdash \Rightarrow A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad B \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}\,L\to}{\Box(A\to B), \Box A \Rightarrow \Box B}\,LR\Box}{\Rightarrow \Box(A\to B) \to (\Box A \to \Box B)}\,R\to \text{ 2 VOLTE}$$

KD

$\dfrac{\Gamma \Rightarrow}{\Box\Gamma, \Pi \Rightarrow \Sigma}$ LD

KT

$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box A \Rightarrow \Delta}$ LT

S5

calcolo NON cut-free, ovvero il CUT NON è eliminabile:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\neg p \Rightarrow \Box\neg p}{\Rightarrow \neg\Box\neg p, \Box\neg p}\,R\neg}{\Rightarrow \Box\neg\Box\neg p, \Box\neg p}\,45 \qquad \dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{\neg p, p \Rightarrow}\,L\neg}{\Box\neg p, p \Rightarrow}\,LT}{p \Rightarrow \Box\neg\Box\neg p}\,cut}{\Rightarrow p \to \Box\neg\Box\neg p}\,R\to$$

$\dfrac{\Gamma^{\Box} \Rightarrow A, \Delta^{\Box}}{\Gamma \Rightarrow \Box A, \Delta}$ 45 (+LT+CUT) = ottengo calcolo completo per S5

$\dfrac{\Box\Pi_1 \Rightarrow A, \Box\Sigma_1}{\Box\Pi_1, \Pi_2 \Rightarrow \Box A, \Box\Sigma_1, \Sigma_2}$ stessa regola

① CALCOLI INTERNI

Ogni sequente può essere interpretato come una formula

$G3.C \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ sse $C \vdash \wedge\Gamma \to \vee\Delta$

GH.L

$\vdash \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 | \ldots | \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ ipersequente, multins. di sequenti

sse

$L \vdash \wedge\Gamma_1 \to \vee\Delta_1 \vee \Box(\wedge\Gamma_2 \to \vee\Delta_2) \vee \ldots \vee \Box(\wedge\Gamma_n \to \vee\Delta_n)$

② CALCOLI ESTERNI

CALCOLI ETICHETTATI

SINTASSI: - insieme numerabile di etichette $w, v, u, \ldots$

- predicato binario R

FORMULE: - atomi relazionali wRv

- formule etichettate $w:A$ dove $A \in Fm_\Box$

SEQUENTE: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ dove Γ è 1 multins. di atomi relaz. e formule etichettate e Δ è un multinsieme di form. etichettate

AND

$$\frac{w:A, w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w:A\wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\wedge \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A\wedge B}\, R\wedge$$

$\vDash_w A\wedge B$ allora $\vDash_w A$ e $\vDash_w B$

OR

$$\frac{w:A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w:A\vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\vee \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A, w:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A\vee B}\, R\vee$$

IMPLIC.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \quad w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w:A\to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\to \qquad \frac{w:A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A\to B}\, R\to$$

$$\overline{w:\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\bot$$

$$w:p, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:p$$

sequenti iniziali

BOX

$\vDash_w \Box A$ sse $\forall v(wRv \supset \vDash_v A)$

$$\frac{v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\Box \qquad \frac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, u:\Box A}\, R\Box \text{ con } u \notin \{\Gamma, \Delta, w\}$$

Scansionato con CamScanner

29/03/2023

$$\frac{wRu, u A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w \Diamond A, \Gamma \Rightarrow \Diamond} L\Diamond$$

$\forall v,w$ se $w:\Box A$ e wRv allora $v:A$

$$\frac{v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\Box \qquad \frac{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box A} R\Box, u \notin \{\Gamma, \Delta, w\}$$

$$\frac{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, w\Diamond A, v:A}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Diamond A} R\Diamond$$

G3K $\vDash A$ allora in G3.K $\vdash \Rightarrow w:A$

esempio:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{wRv, v:A \Rightarrow v:B, v:A \qquad wRv, v:B, v:A \Rightarrow v:B}{wRv, v:A \to B, v:A \Rightarrow v:B} L\to}{wRv, v:A\to B, w:\Box(A\to B), w:\Box A \Rightarrow v:B} L\Box}{wRv, w:\Box(A\to B), w:\Box A \Rightarrow v:B} L\Box}{w:\Box(A\to B), w:\Box A \Rightarrow w:\Box B} R\Box}{w:\Box(A\to B) \Rightarrow w:\Box A \to \Box B} R\to}{\Rightarrow w:\Box(A\to B) \to (\Box A \to \Box B)} R\to$$

T riflessività $\forall w (wRw)$ $\qquad \dfrac{wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$ rif

$\Box A \to A$

G3.T = G3.K + rif

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{w:A,\ w:\Box A \Rightarrow w:A}{wRw,\ w:\Box A \Rightarrow w:A}\ L\Box}{w:\Box A \Rightarrow w:A}\ \text{rif}}{\Rightarrow w:\Box A \to A}\ R\to$$

G3.4

$\Box A \to \Box\Box A \qquad \forall w,v,u\ (wRv \text{ e } vRu \supset wRu)$

$$\dfrac{wRu,\ wRv,\ vRu,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv,\ vRu,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{trans}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{v:A,\ \dots \Rightarrow v:A}{wRu,\ wRv,\ vRu,\ w:\Box A \Rightarrow v:A}}{wRv,\ vRu,\ w:\Box A \Rightarrow v:A}\ R\Box}{wRv,\ w:\Box A \Rightarrow v:\Box A}\ R\Box}{w:\Box A \Rightarrow w:\Box\Box A}$$

$$\dfrac{sRt,\ tRs,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{tRs,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{sim}$$

G3.S5 = G3.K + {rif, trans}

G3.S5 = G3.S4 + {sim}

D: $\Box A \rightarrow \Diamond A$ $\quad \forall w \exists v (wRv)$ $\quad \dfrac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$ $u \notin \Gamma, \Delta$ ser(ialità)

3 regole in 1 volta :(

$$\dfrac{wRv, v:A \Rightarrow v:A}{w:\Box A \Rightarrow w:\Diamond A}$$

2: $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$ $\quad \forall w,v,u\,(wRv \text{ e } wRu \supset \exists z (vRz \text{ e } uRz))$

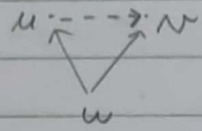
$$\dfrac{vRz, uRz, wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$ CONVER. DEBOLE — con z NON nella conclusione

$$\dfrac{vRu, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$ CONV. DEBOLE — u NON nella conclusione

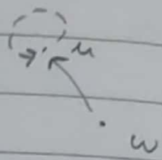
30/03/2023

C'è un refuso sul libro nella tabella 9.2

$$\frac{uRv, wRu, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRu, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Eucl}$$



$$\frac{uRu, wRu, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRu, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Euc , caso particolare}$$



$$\frac{uRu, wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \text{Euc (C)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{u:A, \dots \Rightarrow u:A}{uRu, wRu, u:\Box A \Rightarrow u:A}\ L\Box}{wRu, u:\Box A \Rightarrow u:A}\ \text{Euc C}}{wRu \Rightarrow u:\Box A \to A}\ R\to}{\Rightarrow w:\Box(\Box A \to A)}\ R\Box$$

G3.L

$$\left.\begin{array}{l} lg(w:A) = lg(A) \\ lg(wRv) = 0 \end{array}\right\}\ \text{lunghezza}$$

Lemma $G3.L \vdash w:A, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:A$

DIM per induz. su $lg(w:A)$

CASO BASE: $w:p, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:p$

$u:\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:\bot \leftarrow L\bot$

CASO INDUTTIVO:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{w:B, w:C, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B}\ IH \qquad \dfrac{}{w:B, w:C, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:C}\ IH}{w:B, w:C, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B\wedge C}\ R\wedge}{w:B\wedge C, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:B\wedge C}\ L\wedge$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{v:B,\ wRv,\ w:\Box B,\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\ v:B}\ IH}{wRv,\ w:\Box B,\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\ v:B}\ L\Box}{u:\Box B,\ \Gamma \Rightarrow \Delta,\ w:\Box B}\ R\Box$$

sostituzione etichette

Def sostituire u con v $[v/u]$

- $w[v/u] = \begin{cases} v & \text{se } w \equiv u \\ w & \text{altrimenti} \end{cases}$

- $(w:A)[v/u] = w[v/u]:A$

- $(w_1 R w_2)[v/u] = w_1[v/u] R\, w_2[v/u]$

- $\Gamma[v/u]$ sostituzione in multinsieme

- $(\Gamma \Rightarrow \Delta)[v/u]$

lemma la regola $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{(\Gamma \Rightarrow \Delta)[v/u]}$ $[v/u]$ è PP-AMMISSIBILE

questo NON significa che sostituendo otteniamo la stessa cosa, infatti possiamo usare anche etichette "vecchie"

DIM per induz. sulla profondità della DER. di $\Gamma \Rightarrow \Delta$

CASO BASE:

	$w:p, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, w:p$	$w:\bot, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta$
$w \equiv u$	$u:p, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta_1[v/u], u:p$	$u:\bot, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]$
$w \not\equiv u$	$w:p, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta_1[v/u], w:p$	$w:\bot, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]$

CASI INDUTTIVI:

$$\frac{\vdash^{k} \quad w:A, w:B, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta}{\vdash^{k+1} \quad w:A\wedge B, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta} L\wedge$$

$\downarrow$ IH

$$\frac{\vdash^{k} \quad w[v/u]:A, w[v/u]:B, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]}{\vdash^{k+1} \quad u[v/u]: A\wedge B, \Gamma_1[v/u] \Rightarrow \Delta[v/u]}$$

$$\frac{w_2:A, w_1Rw_2, w_1:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w_1Rw_2, w_1:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\Box$$

IH

$$\frac{w_2[\cdot]:A, w_1[\cdot]Rw_2[\cdot], w_1[\cdot]:\Box A, \Gamma[\cdot] \Rightarrow \Delta[\cdot]}{}$$

$$\frac{w_1Rw_2, \Gamma \Rightarrow \Delta, w_2:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w_1:\Box A} R\Box \quad w_2 \notin \{w_1, \Gamma, \Delta\}$$

IH

$w_3 \notin \{\Gamma, \Delta, w_1, u, v\}$

$[w_3/w_2]$

$$\frac{\dfrac{w_1Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta, w_3:A}{w_1[\cdot]Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta[\cdot], w_3:A} IH}{\Gamma[\cdot] \Rightarrow \Delta[\cdot], w_1[\cdot]:\Box A} R\Box \quad \text{per costruz. } w_3 \notin \{(\Gamma, \Delta, w_1)[v/u]\}$$

$$\frac{w_2Rw_4, w_3Rw_4, w_1Rw_2, w_1Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w_1Rw_2, w_1Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

IH $[w_5/w_4]$

$$\frac{w_2Rw_5, w_3Rw_5, w_1Rw_2, w_1Rw_3, \Gamma \Rightarrow \Delta}{}$$

TEOREMA le seguenti regole di indebolimento sono PP-AMMISS.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta} LW \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} LW_R \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:B} RW$$

DIM per induz. sulla profondità della DER di $\Delta \Rightarrow \Gamma$

$$\frac{u_2:A, u_1Ru_2, u_1:\Box A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta}{u_1Ru_2, u_1:\Box A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta} L\Box$$

IH

$$\frac{u_2:A, u_1Ru_2, u_1:\Box A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta, w:B}{u_1Ru_2, u_1:\Box A, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta, w:B}$$

$$\vdash^k \frac{uRv, \Gamma \Rightarrow \Delta_1, v:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta_1, u:\Box A} R\Box$$

$[v_1/v]$

$$\vdash^k \frac{uRv_1, \Gamma \Rightarrow \Delta_1, v_1:A}{} IH$$

$$\vdash^k \frac{uRv_1, \Gamma \Rightarrow \Delta_1, v_1:A, w:B}{\vdash^{k+1} \; \Gamma \Rightarrow \Delta_1, u:\Box A, u:B} R\Box \qquad v_1 \notin \{\Gamma, \Delta, u, w\}$$

La REG. di NECESSITAZIONE È AMMISSIBILE

$$\frac{\Rightarrow w:A}{\Rightarrow w:\Box A}\,N$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Rightarrow w:A}{\Rightarrow v:A}\,[w/_u]}{wRv \Rightarrow v:A}\,LW_R}{\Rightarrow w:\Box A}\,R\Box$$

03/04/2023

DIMOSTRAZIONE PP-INVERTIBILITÁ

esempio proposizionale $L\rightarrow$

$$G3L \quad \vdash^{n} w:A\rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \text{allora} \quad \begin{cases} \vdash^{n} \Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \\ \vdash^{n} w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta \end{cases}$$

CASO BASE $h=1$

supponiamo che sia sequente iniziale $w:A\rightarrow B, v:p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', v:p$
dobbiamo avere una derivazione per $v:p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', v:p, w:A$
OK perché è un sequente iniziale.
Idem altro caso con $w:B$ nell'antecedente
$h=1$

$$\left.\begin{array}{l} w:A\rightarrow B, v:\perp, \Gamma' \Rightarrow \Delta \\ v:\perp, \Gamma' \Rightarrow \Delta, w:A \\ w:B, v:\perp, \Gamma' \Rightarrow A \end{array}\right\} \text{OK perché sono conclusioni di } L\perp$$

CASO INDUTTIVO $h=K+1$

IH per derivazioni di profondità $\leq K$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \qquad w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w:A\rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} R$$

$$\frac{w:A\rightarrow B, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \qquad (w:A\rightarrow B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2)}{w:A\rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

IH

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, w:A \qquad (\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, w:A)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A}$$

Esempio con regole modali

- $L\Box$

Devo dimostrare $\vdash^n wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$
allora $\vdash^n v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta$

$$\frac{\vdash^n wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, Lw$$

perché
$\vdash^n \Pi \Rightarrow \Sigma$ allora $\vdash^n w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma$

- $R\Box$

$\vdash^n \Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box A$ allora $\vdash^n wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v:A$ dove $v \notin \{w, \Gamma, \Delta\}$

CASO BASE vediamo solo il caso del sequente iniziale
$u:p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', u:p, w:\Box A$

$wRv, u:p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', u:p, v:A$

CASI INDUTTIVI

1) Caso in cui è principale

$$\frac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box A}\, R\Box \quad u \notin \{w, \Gamma, \Delta\} \quad \xrightarrow{[v/u]} \quad \frac{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A}$$

2) Caso NON principale

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, w:\Box A \quad (\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, w:\Box A)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box A}\, R \quad \xrightarrow{\text{IH con } u \text{ NUOVA}} \quad \frac{wRu, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, u:A \quad wRu, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, u:A}{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:A}$$

$v \notin \{\Gamma, \Delta, w\}$

$v \notin \{\Gamma, \Delta, w, u\}$

Scansionato con CamScanner

TR le 3 regole seguenti PP-AMMISSIBILI

$$\frac{wRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} LCR \qquad \frac{w:A, w:A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{w:A, \Gamma \Rightarrow \Delta} LC \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A, w:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A} RC$$

Dim per induz. simultanea sulla profondità della derivazione delle premesse delle 3 regole.

$h = k+1$

α è o formula etichettata o atomo relazionale

1. nessun α è principale in C
2. 1 α è "
3. 2 α sono "

3 $$\frac{wRw, wRw, wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRw, wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta} trans \xrightarrow{IH} \frac{wRw, wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta} trans$$

$$\frac{vRv, wRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} Euc \xrightarrow{IH} \frac{vRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta} Euc\ C$$

1 $$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, w:A, w:A \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, w:A, w:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A, w:A} R$$

IH

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, w:A \qquad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, w:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A} R$$

(2)

$$\frac{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box A, v:A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box A, w:\Box A} R\Box$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash^k wRu, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:A, v:A}{\vdash^k wRv, wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v:A, v:A} R\Box\ [v/u]}{\vdash^k wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v:A, v:A} IH}{\vdash^k wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v:A} IH}{\vdash^{k+1} \Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box A} R\Box$$

ora facciamo $L\Box$

$$\frac{v:A, wRv, w:\Box A, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, w:\Box A, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta} L\Box$$

IH

$$\vdash^k \frac{v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

05/04/2023

ELIMINAZIONE CUT regole MODALI

TR. La regola di cesura/taglio/cut

$$\dfrac{\dfrac{D_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A} \quad \dfrac{D_2}{w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

è AMMISSIBILE in G3.L

Dim: per induz lessicografica su $< l(w:A), h(D_1)+h(D_2) >$

1. $h(D_1) = 1$ oppure $h(D_2) = 1$ (sono sequenti iniz. o $L\bot$)
2. $w:A$ NON è principale in R_1 o R_2
3. $w:A$ è principale in R_1 e R_2

(1) caso $h(D_2) = 1$, suppongo sia sequente iniziale

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \qquad v:p, w:A, \Pi' \Rightarrow \Sigma', v:p}{v:p, \Gamma, \Pi' \Rightarrow \Delta, \Sigma', v:p}$$

2 seq. iniziali

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:p \qquad w:p, \Pi \Rightarrow \Sigma', w:p}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma', w:p}$$

è seq. iniz. e cut-formula

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:p}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma', w:p}\ LW, RW$$

possiamo arrivare a conclus. con WEAK.

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A \qquad \dfrac{}{v:\bot, w:A, \Pi' \Rightarrow \Sigma}\ L\bot}{v:\bot, \Gamma, \Pi' \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

arrivo a conclus. partendo da premessa 1

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:\bot \qquad w:\bot, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:\bot}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ R\bot}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ LW\ e\ RW$$

② assumo $w:A$ NON principale in R_1

1) R_1 NON ha condizioni a lato

2) R_1 ha condizioni a lato ($R_1 \in \{R\Box, L\Diamond, \text{CONV.DEB}\}$)

1)
$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', w:A} \qquad \overset{D_{12}}{(\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', w:A)}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:A}\,R_1 \qquad \overset{D_2}{w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma' \Rightarrow \Delta', w:A} \qquad \overset{D_2}{w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma}\,IH \qquad \left(\dfrac{\overset{D_{12}}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta'', w:A} \qquad \overset{D_2}{w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta'', \Sigma}\,IH\right)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,R1$$

esempio specifico

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', v:B, w:A} \qquad \overset{D_{12}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', v:C, w:A}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', v:B \wedge C, w:A} \qquad \overset{D_2}{w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, v:B \wedge C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', v:B, w:A} \qquad \overset{D_2}{w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, v:B}\,IH \qquad \dfrac{\overset{D_{12}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', v:C, w:A} \qquad \overset{D_2}{w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, v:C}\,IH}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, v:B \wedge C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{vRu, \Gamma \Rightarrow \Delta', w:A, u:B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta', w:A, v:\Box B} R\Box \; u \notin \{\Gamma, \Delta', w, v\} \qquad \overset{D_2}{w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, v:\Box B}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{vRu, \Gamma \Rightarrow \Delta', w:A, u:B}}{vRt, \Gamma \Rightarrow \Delta', w:A, t:B} [t/u] \; t \notin \{\Gamma, \Delta', \Pi, \Sigma, w, v\} \qquad w:A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{vRt, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, t:B} IH}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, v:\Box B} R\Box$$

③ CASO $A \equiv B \wedge C$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{12}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:B} \quad \overset{D_{12}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:C}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:B \wedge C} R\wedge \qquad \dfrac{\overset{D_2}{w:B, w:C, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{w:B \wedge C, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} cut$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{12}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:C} \qquad \dfrac{\overset{D_{11}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:B} \quad \overset{D_2}{w:B, w:C, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{w:C, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} IH_1}{\Gamma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma} IH_1}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma} RC \text{ e } LC$$

$A \equiv \Box B$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:B}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box B}\, R\Box \quad \dfrac{\overset{D_{21}}{v:B, w:\Box B, wRv, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{w:\Box B, wRv, \Pi' \Rightarrow \Sigma}\, L\Box}{\Gamma, wRv, \Pi' \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$D_1 \rightarrow \Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box B$

$u \notin \{\Gamma, \Delta, w\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{D_{11}}{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:B}}{wRv, \Gamma \Rightarrow \Delta, v:B}\, [v/u] \quad \dfrac{\overset{D_1}{\Gamma \Rightarrow \Delta, w:\Box B} \quad \overset{D_{21}}{w:\Box B, v:B, wRv, \Pi \Rightarrow \Sigma}}{v:B, wRv, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\, IH_2}{wRv, wRv, \Gamma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma}\, IH_1}{wRv, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\, LC + RC$$

12/04/2023

TEOREMA di VALIDITÀ

INTRO

- **DEF.** Dato $M = \langle W, R, I \rangle$, una M-realizzazione σ

$$\sigma : \mathcal{E} \rightarrow W$$

- **VERITÀ di E** (generica formula etichettata) rispetto a una M-realizzazione σ, $\sigma \models E$

$$\sigma \models w:A \quad \text{sse} \quad \models^M_{\sigma(w)} A$$

$$\sigma \models wRv \quad \text{sse} \quad \sigma(w) R \sigma(v)$$

- $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è **verificato da σ**, $\sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ sse

se $\sigma \models E \; \forall E \in \Gamma$ allora $\sigma \models F$ per qualche $F \in \Delta$

- $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è **L-VALIDO** sse

$\forall M$ basato $F \in L$ (FRAME) e $\forall M$-realizzazione σ, $\sigma \models \Gamma \Rightarrow \Delta$

TR. VALIDITÀ o CORRETTEZZA

$G3.L \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ allora $\mathcal{C}^L \models \Gamma \Rightarrow \Delta$

$(G3.L \vdash \Rightarrow w:A)$

DIM. per induzione su $h(D)$ (dove D è la deriv. di $\Gamma \Rightarrow \Delta$)

CASO BASE

$h(D) = 1$ $\quad w:p, \Gamma' \Rightarrow \Delta', w:p$ oppure $w:\bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta$

se $\sigma \models w:p$ allora $\sigma \models w:p$

nell'antecedente — nel succedente

quindi NON è possibile trovare un contromodello in cui vengono realizzate tutte le regole a SX e nessuna regola a DX

$\sigma \not\models \bot$ ← quindi c'è una regola a SX NON realizzabile

CASI INDUTTIVI: $h(D) = n+1$

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta' \qquad (\Gamma'' \Rightarrow \Delta'')}{\Gamma \Rightarrow \Delta} R$$

$$\boxed{IH: \ \mathcal{C}^k \models \Gamma' \Rightarrow \Delta' \qquad (\mathcal{C}^k \models \Gamma'' \Rightarrow \Delta'')}$$

IMPLICAZIONE

$$\frac{\Gamma' \Rightarrow \Delta, w:B \qquad w:C, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{w:B \to C, \Gamma' \Rightarrow \Delta} \; L\to$$

Sia $\sigma \models w:B \to C, \Gamma'$ $\quad \overbrace{\exists F \in \Delta \text{ t.c. } \sigma \models F}^{?}$

IH_1: $\exists G \in \{\Delta, w:B\}$ t.c. $\sigma \models G$

$$\frac{\sigma \models w:B \qquad \sigma \models w:B \to C}{\sigma \models w:C}$$

IH_2 $\exists F \in \Delta$ $(\sigma \models F)$

$$\frac{w:B, \Gamma \Rightarrow \Delta', w:C}{\Gamma \Rightarrow \Delta', w:B \to C} \; R\to$$

Sia σ t.c. $\sigma \models \Gamma$ $\quad \exists F \in \Delta', w:B \to C$ $(\sigma \overset{?}{\models} F)$

1) $\sigma \not\models w:B$ allora $\sigma \models w:B \to C$

2) $\sigma \models w:B$ per IH $\exists G \in \{\Delta', w:C\}$ t.c. $\sigma \models G$
se $\sigma \models w:C$
allora $\sigma \models w:B \to C$

DISGIUNZIONE

$$\frac{w: B, \Gamma' \Rightarrow \Delta \qquad w: C, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{w: B \vee C, \Gamma' \Rightarrow \Delta} \; L\vee$$

Sia $\sigma \models w: B \vee C, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ d.d. $\exists F \in \Delta \, (\sigma \models F)$

1) $\sigma \models w: B$ per IH_1 $\exists G \in \Delta \, (\sigma \models G)$

2) $\sigma \models w: C$ per IH_2 $\exists G' \in \Delta \, (\sigma \models G')$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta', w: B, w: C}{\Gamma \Rightarrow \Delta', w: B \wedge C} \; R\vee$$

Sia $\sigma \models \Gamma$ per IH $\exists E \in \{\underbrace{\Delta'}_{1}, \underbrace{w: B}_{2}, \underbrace{w: C}_{3}\} (\sigma \models E)$

In ogni caso

$\exists F \in \{\Delta', w: B \vee C\} \; \sigma \models F$

BOX

$$\frac{w: B, wRv, w: \Box B, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{wRv, w: \Box B, \Gamma' \Rightarrow \Delta} \; L\Box$$

Sia σ $(\sigma \models wRv, w: \Box B, \Gamma')$ d.d. $\exists \Gamma \in \Delta \, (\sigma \models F)$

$\models_{\sigma(w)} \Box B$, $\forall u (\sigma(w) R u \supset \models_u B)$

$\sigma(w) R \sigma(v) \qquad \models_{\sigma(v)} B \qquad \sigma \models v: B$

$$\frac{wRu, \Gamma \Rightarrow \Delta', u:B}{\Gamma \Rightarrow \Delta', w:\Box B}\ R\Box \qquad u \notin \{\Gamma, \Delta, w\}\ *$$

Sia σ $(\sigma \models \Gamma)$

1) $\exists F \in \Delta' (\sigma \models F)$

2) $\nexists F \in \Delta' (\sigma \models F)$ ① $\nexists t \in W (\sigma(w) R t)$ $\sigma \models w : \Box B$

② $\exists t \in W (\sigma(w) R t)$

Sia t t.c. $\sigma(u) R t$

Sia τ t.c. $\tau(u) = t$, $\tau(v) = \sigma(v)$ $\forall (v \neq u)$

$\forall x \in W (\tau(u) R x \supset \models_x B)$

$\models_{\tau(u)} \Box B$ ovvero $\tau \models w : \Box B$ ma anche $\sigma \models w : \Box B$

RIPROVIAMO!

$\sigma \models \Gamma$

① $\exists t (\sigma(w) R t)$

② $\nexists t (\sigma(w) R t)$

$\sigma(w)$ è cieco quindi $\sigma \models w : \Box B$

$\tau(u) = t$

$\tau(v) = \sigma(v)$ ← per poter usare IH

1.1 $\tau \models \Delta'$ allora $\sigma \models \Delta'$

1.2 $\tau \models u : B$ sappiamo che $u \neq w$ *

$\models_{\tau(u)} B$ sse $\models_t B$ $\wedge$ $\models_{\sigma(w)} \Box B$

allora $\forall t \in W (\tau(w) R t \supset \models_t B)$ sse

REGOLE NON LOGICHE

$L \equiv K.4$

$$\frac{wRu, wRv, vRu, \Gamma' \Rightarrow \Delta}{wRv, vRu, \Gamma' \Rightarrow \Delta}\ \text{Trans.}$$

se questo è vero

è vero anche questo

$\sigma \models wRv, vRu, \Gamma'$

$$\frac{\sigma(w)R\sigma(v) \qquad \sigma(v)R\sigma(u)}{\sigma(w)\,R\,\sigma(u)}$$

13/04/23

TEOREMA di COMPLETEZZA debole

TR. se $\mathcal{C}^L \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ allora $G3.L \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

DIM. se $G3.L \nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ allora $\mathcal{C}^L \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$

COMP. DEBOLE se $\models^{\mathcal{C}^L} A$ allora $\vdash^{L} A$

COMP. FORTE se $\Gamma \models^{\mathcal{C}^L} A$ allora $\Gamma \vdash^{L} A$

$\downarrow$

$\exists \Gamma' \subset \Gamma$ finito t.c. $\Gamma' \vdash^{L} A$

5 PASSI:

1. definiamo una procedura di proof-search
2. definiamo un ramo saturo di un proof-search fallimentare
3. " un modello generato da un ramo saturo
4. TRUTH LEMMA: il modello falsifica la radice dell'albero
5. il modello è basato su frame per la logica

$\underline{4+K} := \overbrace{L\rightarrow, R\rightarrow, L\rightarrow, R\rightarrow}^{4} + \overbrace{\text{regole non logiche}}^{K}$

T_n = albero costruito all'n-esimo passo

foglie NON iniziali: se è sequente iniziale o istanze di $L\perp$

1 **DEF** L-albero per $\Gamma \Rightarrow \Delta$ per induzione

PASSO 0: costruiamo l'albero $\Gamma \Rightarrow \Delta$

PASSO n+1:

CASO 1 → tutte le foglie di T_n sono seq. iniziali o $L\perp$; mi fermo e $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è L-derivabile

CASO 2 → nessuna regola è applicabile alle foglie di T_n; mi fermo e $\Gamma \Rightarrow \Delta$ NON è derivabile

CASO 3 → costruisco l'albero T_{n+1} applicando la seguente procedura di $4+K$ passi

1) applico a tutte le foglie di T_n non iniziali tutte le possibili istanze di $R\rightarrow$

SIA

$$\frac{w_1:A_1,\dots,w_K:A_K,\ \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n,\ w_1:B_1,\dots,w_K:B_K}{\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n,\ w_1:A_1\rightarrow B_1,\dots,w_K:A_K\rightarrow B_K}\ R\rightarrow$$

2) come punto precedente ma con $L\rightarrow$

$$w_1:A_1\rightarrow B_1,\dots,w_K:A_K\rightarrow B_K,\ \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$$

aggiungo sopra i seguenti 2^K NODI

$$w_{i_1}:B_{i_1},\dots,w_{i_m}:B_{i_m},\ \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n,\ w_{J_{m+1}}:A_{J_{m+1}},\dots,w_{J_K}:A_{J_K}$$

dove $i_1 \dots i_m \in \{1,\dots,K\}$

e $J_{m+1}\dots J_K \in \{1,\dots,K\} - \{i_1,\dots,i_m\}$

esempio concreto:

$$\frac{w_1:B_1, w_2:B_2 \Rightarrow \quad w_1:B_1 \Rightarrow w_2:A_2 \quad w_2:B_2 \Rightarrow w_1:A_1 \quad \Rightarrow w_1:A_1, w_2:A_2}{w_1:A_1\rightarrow B_1,\ w_2:A_2\rightarrow B_2 \Rightarrow}$$

* $\overline{\Gamma}(\overline{\Delta})$ indicano l'unione di tutti i $\overline{\Gamma}_i(\overline{\Delta}_i)$ che occorrono nel ramo

3) come punti precedenti ma con $R\square$

$$\frac{w_1Rv_1, \dots, w_kRu_k, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n, u_1:B_1, \dots, u_k:B_k}{\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n, w_1:\square B_1, \dots, w_k:\square B_k}$$

dove $u_1 \dots u_k$ sono etichette NUOVE

4) come punti precedenti ma con $L\square$

$\forall$ coppia $w_1Rv_1, w_1:\square A_1$ che occorre a SX, aggiungo $v_1:\square A_1$ a SX

esempio:

$$\frac{=}{w_iRv_{i1}, \dots, w_iRv_{ij}, w_i:\square A_i \Rightarrow}$$

J) t.c. $4 < J \leq K$ se R è la J-esima regola di G3.L, allora applico alla foglia tutte le istanze applicabili di R

per evitare derivazioni infinitarie, aggiungiamo la side condition che le etichette usate $\in \{\Delta, \Gamma\}$

esempio:

$$\frac{wRw, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} R1 \qquad w \in \{\Gamma, \Delta\}$$

2 RAMO L-SATURO *

DEF per CASI

1) nessun $w:p \in \overline{\Gamma} \cap \overline{\Delta}$
2) " $w:\perp$ occorre in $\overline{\Gamma}$

} ramo non è iniziale

3) se $w:A \to B \in \overline{\Gamma}$ allora $w:B \in \overline{\Gamma}$ oppure $w:A \in \overline{\Delta}$
4) se $w:A \to B \in \overline{\Delta}$ allora $w:A \in \overline{\Gamma}$ e $w:B \in \overline{\Delta}$
5) se wRv e $w:\square A \in \overline{\Gamma}$ allora $v:A \in \overline{\Gamma}$
6) se $w:\square A \in \overline{\Delta}$ allora per qualche u, $wRu \in \overline{\Gamma}$ e $u:A \in \overline{\Delta}$

R_J) se $R_J \in$ G3L e le formule princ. di $R_J \in \overline{\Gamma}$, allora f. attive di $R_J \in \overline{\Gamma}$

17/04/2023 cambio quaderno!!!

3 MODELLO GEN. da RAMO SATURO B

$M^B = \langle W, R, I \rangle$ $\quad W = \{u : u \in \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}\}$ $\quad R = \{\langle u, v \rangle : uRv \in \bar{\Gamma}\}$

$w \in I(p)$ sse $w : p \in \bar{\Gamma}$

dobbiamo mostrare che M^B rende false le regole in Δ e vere quelle in Γ

creiamo una realizzazione: $\sigma_{id}(w) = w$ per $w \in W$

4 TRUTH LEMMA

con $w \in \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}$

Dati $\bar{\Gamma}$ e $\bar{\Delta}$ e M^B costruito da essi, abbiamo che:

① se $w : A \in \bar{\Gamma}$ allora $\models^{M^B}_{\sigma_{ID}(w)} A$

② se $w : A \in \bar{\Delta}$ allora $\not\models^{M^B}_{\sigma_{ID}(w)} A$

DIM simultanea per ① e ② su $l(w : A)$

CASO BASE:

$A \equiv p$ $\quad$ se $p \in \bar{\Gamma}$ allora $\models^M_w p$

se $p \in \bar{\Delta}$ allora $\not\models^M_w p$

(w al posto di $\sigma_{ID}(w)$
M " di M^B)

se $\bot \in \bar{\Gamma}$ allora $\models_w \bot$

se $\bot \in \bar{\Delta}$ allora $\not\models_w \bot$

ALTRI CASI:

$A \equiv B \wedge C$ $\quad$ $w : B \wedge C \in \bar{\Gamma}$ d.d. $\models_w B \wedge C$

$w : B \in \bar{\Gamma} \xrightarrow[IH]{} \models_w B$

e $\quad$ e

$w : C \in \bar{\Gamma} \xrightarrow[IH]{} \models_w C$

$w : B \wedge C \in \bar{\Delta}$ d.d. $\not\models_w B \wedge C$

$w : B \in \bar{\Delta} \xrightarrow[IH]{} \not\models_w B$

oppure $\quad$ oppure

$w : C \in \bar{\Delta} \xrightarrow[IH]{} \not\models_w C$

$A \equiv B \to C$ $\quad w: B \to C \in \bar{\Gamma}$ d.d. $\models_w B \to C$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$w: B \in \bar{\Delta} \xrightarrow{IH} \not\models_w B$

oppure $\qquad$ oppure

$w: C \in \bar{\Gamma} \xrightarrow{IH} \models_w C$

$w: B \to C \in \bar{\Delta}$ d.d. $\not\models_w B \to C$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$w: B \in \bar{\Gamma} \xrightarrow{IH} \models_w B$

e

$w: C \in \bar{\Delta} \xrightarrow{IH} \not\models_w C$

$A \equiv \Box B$ $\quad w: \Box B \in \bar{\Gamma}$

$\forall v \in \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}$ (se $wRv \in \bar{\Gamma}$ allora $v: B \in \bar{\Gamma}$)

$$\Downarrow IH$$

$\forall v \in W$ (se wRv allora $\models_v B$) $\Rightarrow \models_w \Box B$

$w: \Box B \in \bar{\Delta}$ allora per qualche u, $wRu \in \bar{\Gamma}$ e $u: B \in \bar{\Delta}$

$$\Downarrow$$

$\exists u \in \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}$ ($wRu \in \bar{\Gamma}$ e $u: B \in \bar{\Delta}$)

$$\Downarrow IH$$

$\exists u \in W$ (wRu e $\not\models_u B$) $\Rightarrow \not\models_w \Box B$

$A \equiv \Diamond B$ $\quad w: \Box B \in \bar{\Gamma}$

$$\Downarrow$$

$\exists u \in \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta}$ ($wRu \in \bar{\Gamma}$ e $u: B \in \bar{\Gamma}$)

$$\Downarrow IH$$

$\exists u \in W$ (wRu e $\models_u B$) $\Rightarrow \models_w \Diamond B$

$w : \Diamond B \in \bar{\Delta}$

$\Downarrow$

$\forall v \in \bar{\Gamma} \cup \bar{\Delta} \, (wRv \in \bar{\Gamma} \supset v : B \in \bar{\Delta})$

$\Downarrow IH$

$\forall v \in W \, (wRv \supset \nvDash_v B) \Rightarrow \nvDash_w \Diamond B$

$\boxed{5}$ per G3.K non c'è bisogno di fare nulla

in generale è banale, boh ok ☺

FINITO teorema!

mostrare che il modello è basato su frame per la logica

19/04/2023 ma che roba è sta qua???

$L \vdash A$ allora $G3.L \vdash \Rightarrow w: A$

DIM. per induzione sulla profondità di $(L \vdash A)$

CASO BASE È BANALE ... OK ;)

CASO INDUTTIVO

$$\dfrac{\Rightarrow w: A \qquad \dfrac{\Rightarrow w: A \to B}{w: A \Rightarrow w: B}}{\Rightarrow w: B}$$

20/04/2023 **FINITEZZA PROOF-SEARCH**

DEF. D è una derivaz. minimale di $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in $G3.L$

sse

$\forall D'$ der. di $\Gamma \Rightarrow \Delta$ in $G3.L$ $(h(D') \geq h(D))$

LEMMA Se D è minimale allora ogni etichetta in D
- o occorre nella conclusione
- o è un'etichetta con side-condition

} solo 1 vero

(ad esempio, se applico la riflessività, la applico su un'etichetta NUOVA)

Lemma di PERMUTAZIONE delle REGOLE

Un'istanza di $L\Box$ con wRv principale è permutabile verso il basso rispetto ad ogni istanza di $L\to$, $R\to$, $L\Box$ e ad " " di $R\Box$ in cui wRv NON è attivo.

DIM.

$$\dfrac{\dfrac{v: A, uRu', wRv, w: \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u': B}{uRu', wRv, w: \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u': B}\,L\Box}{wRv, w: \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u: \Box B}\,R\Box$$

1 $\longrightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{uRu', v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u':B}{v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:\Box B}\, R\Box}{wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:\Box B}\, L\Box$$

2

$$\dfrac{\dfrac{v:A, wRv, \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:B}{wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:B}\, L\Box \qquad u:C, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{u: B \to C, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\to$$

$$\dfrac{\dfrac{v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta, u:B \qquad \dfrac{u:C, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{u:C, v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, LW}{u:B \to C, v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\to}{u:B \to C, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\Box$$

altri due casi ($L\Box$ e $R\Box$) sono banali

Lemma

Se D è derivaz. minimale in G3.K di $\Gamma \Rightarrow \Delta$ allora $L\Box$ è applicata 1 volta sola con $w:\Box A$ e wRv principale

DIM. supponiamo di avere deriv. non minimale

$$\dfrac{v:A, wRv, w:\Box A, \Pi \Rightarrow \Sigma}{wRv, w:\Box A, \Pi \Rightarrow \Sigma}\, L\Box$$
$$\vdots$$
$$\dfrac{v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\Box$$

$\mapsto$

$$v:A, wRv, w:\Box A, \Pi \Rightarrow \Sigma$$
$$\vdots$$
$$\vdash^{n}\ \dfrac{v:A, v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash^{n+1}\ \dfrac{v:A, wRv, w:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash^{n+2}\ wRv, u:\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\, L\Box}\, L\Box$$

$\mapsto$

non è minimale, infatti c'è una D equivalente + PICCOLA

$$\dfrac{v:A,\ wRv,\ w:\Box A,\ \Pi \Rightarrow \Sigma}{\vdots}$$

$\leadsto$

sostituiamo L$\Box$ con LC

$$\dfrac{\dfrac{\vdash^{n}\ v:A,\ v:A,\ wRv,\ w:\Box A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}{\vdash^{n}\ v:A,\ wRv,\ w:\Box A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ LC}{\vdash^{n+1}\ wRv,\ w:\Box A,\ \Gamma \Rightarrow \Delta}\ L\Box$$

basta un L$\Box$