Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 2**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/02/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L1 (5 punti). Definiamo in teoria degli insiemi il seguente predicato di overlap fra due insiemi:

$$A \between B := \exists X.(X \in A \land X \in B)$$

Dimostrare in teoria degli insiemi che $\forall A.((\forall B.A \subseteq B) \Rightarrow \forall C.\neg(A \between C))$. Ogni passaggio deve abbreviare uno o più passi di deduzione naturale intuizionista al prim'ordine.

Esplicitare l'enunciato di tutti gli assiomi utilizzati nella dimostrazione.

Assioma dell'insieme vuoto: $\forall X.X \notin \emptyset$
Teorema: $\forall A.((\forall B.A \subseteq B) \Rightarrow \forall C.\neg(A \between C))$
Dimostrazione: sia A insieme t.c. $\forall B.A \subseteq B$ (H) e sia C un insieme t.c. $A \between C$, ovvero $\exists Y.(Y \in A \land Y \in C)$. Quindi sia Y l'insieme t.c. $Y \in A$ (K1) e $Y \in C$ (K2). Dobbiamo dimostrare l'assurdo. Da H si ha $A \subseteq \emptyset$, ovvero $\forall X.(X \in A \Rightarrow X \in \emptyset)$. Quindi, per K1, $Y \in \emptyset$. Quindi, per l'assioma dell'insieme vuoto, assurdo. Qed.

L2 (5 punti). Dimostrare in deduzione naturale per la logica al prim'ordine il seguente enunciato. Preferire una prova intuizionista a una classica ove possibile.

$$\forall n.\forall m.(P(m, f(n)) \Rightarrow P(f(m), n), \quad \forall n.\exists m.P(f(m), f(n)) \vdash \exists z.P(f(z), m)$$

$$\dfrac{\dfrac{\forall n.\exists m.P(f(m), f(n))}{\exists x.P(f(x), f(m))}\,\forall_e[m/n] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall n.\forall m.P(m, f(n)) \Rightarrow P(f(m), n)}{\forall x.P(x, f(m)) \Rightarrow P(f(x), m)}\,\forall_e[m/n]}{P(f(y), f(m)) \Rightarrow P(f(f(y)), m)}\,\forall_e[f(y)/x] \qquad [P(f(y), f(m))]}{P(f(f(y)), m)}\,\Rightarrow_e}{\exists z.P(f(z), m)}\,\exists_i[f(y)/z]}{\exists z.P(f(z), m)}\,\exists_e[y/x]$$

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 2**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/02/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L3 (5 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se l'amore non è per sempre allora la coppia si lascerà o diventerà una coppia aperta. Andrà a finire male e non ci sarà un matrimonio, se la coppia si lascerà. Se diventerà una coppia aperta allora ci sarà un matrimonio e l'amore sarà per sempre. Quindi l'amore sarà per sempre o andrà a finire male.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

$$\neg A \Rightarrow B \vee C, \quad B \Rightarrow D \wedge \neg E, \quad C \Rightarrow E \wedge A \vdash A \vee D$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{A \vee \neg A}\,EM \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A \Rightarrow B \vee C \qquad [\neg A]}{B \vee C}\Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow D \wedge \neg E \qquad [B]}{D \wedge \neg E}\Rightarrow_e}{D}\wedge_{e1}}{A \vee D}\vee_{i2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{C \Rightarrow E \wedge A \qquad [C]}{E \wedge A}\Rightarrow_e}{A}\wedge_{e1}}{A \vee D}\vee_{i1}}{A \vee D}\vee_e \qquad \dfrac{[A]}{A \vee D}\vee_{i1}}{A \vee D}\vee_e$$

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 2**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/02/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L4 (5 punti). Considerate la seguente sintassi per alberi binari i cui nodi interni sono etichettati con numeri interi: $T ::= \emptyset \mid \langle T, \mathbb{Z}, T\rangle$ dove $\mathbb{Z}$ genera tutti i numeri interi.

(a) Scrivere per ricorsione strutturale una funzione *prod* che, dato un albero, calcola il prodotto di tutti gli interi contenuti nell'albero.

(b) Scrivere per ricorsione strutturale una funzione *prune* che, dato un albero, restituisca una copia dell'albero in cui tutti gli interi negativi sono stati rimpiazzati da 1.

(c) Dimostrare per induzione strutturale che $\forall T.prod(prune(T)) \geq 0$. Preferire una prova intuizionista a una classica ove possibile.

Nello svolgere l'esercizio potete utilizzare come date le operazioni di prodotto e confronto ($\geq$) fra numeri interi, nonchè il lemma che dice che il prodotto di numeri interi non negativi è non negativo.

(a) Prima arte di ricorsione strutturale:

$$\begin{array}{lcl} prod(\emptyset) & = & 1 \\ prod(\langle T_1, x, T_2\rangle) & = & prod(T_1) * x * prod(T_2) \end{array}$$

(b) Seconda arte di ricorsione strutturale:

$$\begin{array}{lcl} prune(\emptyset) & = & \emptyset \\ prune(\langle T_1, x, T_2\rangle) & = & \langle prune(T_1), \text{if } (x \geq 0) \text{ then } x \text{ else } 1, prune(T_2)\rangle \end{array}$$

(c) Parte di induzione strutturale:

Teorema: $\forall T. prod(prune(T)) \geq 0$.

Dimostrazione: procediamo per induzione strutturale su T per dimostrare $prod(prune(T)) \geq 0$

- Caso $\emptyset$: dobbiamo dimostrare $prod(prune(\emptyset)) \geq 0$ o, equivalentemente, $1 \geq 0$. Ovvio.
- Caso $\langle T_1, x, T_2\rangle$: per ipotesi induttiva $prod(prune(T_1)) \geq 0$ (II1) e $prod(prune(T_2)) \geq 0$ (II2). Dobbiamo dimostrare $prod(prune(\langle T_1, x, T_2\rangle)) \geq 0$ o, equivalentemente, $prod(prune(T_1)) * (\text{ if } (x \geq 0) \text{ then } x \text{ else } 1) * prod(prune(T_2)) \geq 0$. Dimostriamo che $\text{if } (x \geq 0) \text{ then } x \text{ else } 1 \geq 0$ per casi su $x \geq 0$:
  - Caso $x \geq 0 = true$: $\text{if } (true) \text{ then } x \text{ else } 1 = x \geq 0$ in quando $x \geq 0$
  - Caso $x \geq 0 = false$: $\text{if } (false) \text{ then } x \text{ else } 1 = 1 \geq 0$ ovvio.

  La tesi consegue dalle ipotesi induttive II1 e II2, da quanto appena dimostrato e dalla proprietà dei numeri interi che dice che il prodotto di numeri non negativi è non negativo.

Qed.

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 2**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/02/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

A5 (3 punti). Per ciascuno dei seguenti enunciati, indica se é vero o falso. Se falso, scrivi un controesempio.

	Linguaggio	V	F (scrivi controesempio)
(a)	Considera il monoide $(\mathbb{L}, ++, [])$ dove $\mathbb{L}$ é l'insieme di liste di numeri naturali, $++$ é la concatenazione di liste, e $[]$ é la lista vuota. La funzione $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ definita come $f(l) = 0 :: l$ é un morfismo di monoidi da $(\mathbb{L}, ++, [])$ a $(\mathbb{L}, ++, [])$.		$f([1,2]++[1]) = [0,1,2,1]$ ma $f([1,2])++f([1]) = [0,1,2,0,1]$.
(b)	$(\mathbb{R}, \times, 0)$ forma un monoide.		No, 0 non é l'elemento neutro per $\times$.
(c)	$(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset, \cap)$, dove $\mathcal{P}(X)$ é l'insieme dei sottoinsiemi di un dato insieme X, é un semianello.	Si	

A6 (3 punti). Sia $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un morfismo tra strutture algebriche $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ dello stesso tipo.

(a) Definisci cosa si intende per insieme quoziente di $\mathbb{A}$ rispetto ad f, notazione $\mathbb{A}_{/\sim_f}$.
(b) Definisci cosa si intende per immagine di f, notazione $Imm(f)$.
(c) Enuncia il teorema fondamentale dei morfismi per $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$.

(a) Sia A il sostegno di $\mathbb{A}$. L'insieme quoziente ha come elementi le classi di equivalenza della relazione R su A definita da: $(a, b) \in R$ se e solo se $f(a) = f(b)$.

(b) Sia B il sostegno di $\mathbb{B}$. L'immagine di f é il suo sottoinsieme $\{b \in B \mid \exists a.f(a) = b\}$.

(c) $\mathbb{A}_{/\sim_f}$ é il sostegno di una struttura algebrica dello stesso tipo di $\mathbb{A}$, e tale struttura é isomorfa all'immagine di f.

A7 (4 punti). Sia $(X, \circ, e, ^{-1})$ un gruppo abeliano, con operazione binaria $\circ$, elemento neutro e, ed operazione unaria $\cdot^{-1}$. Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto di X. Assumiamo che:

(I) X é un insieme finito, diciamo di k elementi, che indichiamo come $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.
(II) Y é chiuso sotto l'operazione $\circ$, cioé $x \in Y$ e $y \in Y$ implica $x \circ y \in Y$.

Dimostra le seguenti proposizioni (A), (B), (C), e (D):

(A) Dimostra che, dati $a \in X$ e $b \in X$, $a \circ b = a$ implica $b = e$.
(B) Definiamo per ricorsione sui numeri naturali:

$$\begin{array}{lcl} a^0 & = & e \\ a^{n+1} & = & a \circ a^n \end{array}$$

Per cui, ad esempio, $a^3 = a \circ (a \circ a)$. Dimostra che esiste $j > 0$ tale che $a^j = e$.
(C) Dimostra che, se $a \in Y$, allora $a^{-1} \in Y$.
(D) Dimostra che $(Y, \circ, e, ^{-1})$ forma un sottogruppo di $(X, \circ, e, ^{-1})$.

Nota che nel dimostrare ciascuna proposizione puoi assumere le precedenti come date.

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 2**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/02/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

- Dimostriamo che, se $a = a \circ b$, allora b deve essere e. Abbiamo che $e = a^{-1} \circ a = a^{-1} \circ (a \circ b) = (a^{-1} \circ a) \circ b = e \circ b = b$.
- Dal momento che X é finito, esiste $j > 0$ per cui $a^{n+j} = a^n$. Per definizione, $a^{n+j} = a^n \circ a^j$. Perció $a^n \circ a^j = a^n$, che implica $a^j = e$ per la proposizione precedente.
- Supponi $a \in Y$. Per la proposizione precedente, abbiamo m tale che $a^{m+1} = e$. Perció $a \circ a^m = a^{m+1} = e$. Quindi a^m é l'elemento inverso di a. (Nota che non dobbiamo anche dimostrare $a^m \circ a = e$ in quanto il gruppo é abeliano.) Per definizione di a^n, dal momento che per assunzione Y é chiuso rispetto all'operazione $\circ$, abbiamo che $a^n \in Y$ per ogni $n > 0$. Inoltre, per $n = 0$, abbiamo anche che $a^n = e$ é in Y per la proposizione precedente. Perció in particolare l'inverso a^m di a é in Y.
- Abbiamo giá dimostrato che Y é chiuso rispetto all'operazione $^{-1}$, e per assunzione é chiuso rispetto all'operazione $\circ$. Rimane da dimostrate che contiene l'elemento neutro e. Dato $a \in Y$, abbiamo che $a^{-1} \in Y$, e anche $a \circ a^{-1} \in Y$. Dato che $a \circ a^{-1} = e$, questo conclude la dimostrazione. Alternativamente, possiamo utilizzare Proposizione (B).