Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 2**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/01/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L1 (5 punti). Dimostrare in teoria degli insiemi che $\forall A, B.((\forall C.A \subseteq B \cup C) \Rightarrow A \subseteq B)$. Ogni passaggio deve abbreviare uno o più passi di deduzione naturale al prim'ordine.

Esplicitare l'enunciato di tutti gli assiomi utilizzati.

Assioma dell'unione binaria: $\forall A, B, X.(X \in A \cup B \iff X \in A \vee X \in B)$
Teorema: $\forall A, B.((\forall C.A \subseteq B \cup C) \Rightarrow A \subseteq B)$
Dimostrazione: siano A, B insiemi t.c. $\forall C.A \subseteq B \cup C$ o, equivalentemente, $\forall C, X.(X \in A \Rightarrow X \in B \cup C)$ (H). Dobbiamo dimostrare $A \subseteq B$ o, equivalentemente, $\forall Y.(Y \in A \Rightarrow Y \in B)$. Sia Y insieme t.c. $Y \in A$. Quindi, per H, $Y \in B \cup B$. Quindi, per l'assioma dell'unione binaria, $Y \in B \vee Y \in B$ Quindi procediamo per casi per dimostrare $Y \in B$. Ovvio in entrambi i casi. Qed.

L2 (5 punti). Dimostrare in deduzione naturale per la logica al prim'ordine il seguente enunciato. Preferire una prova intuizionista a una classica ove possibile.

$$\forall m.Q(g(m), g(m)), \quad \forall n, m.(Q(m, g(n)) \Rightarrow \exists z.Q(g(z), n)) \vdash \exists z.Q(z, m)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall n, m.Q(m, g(n)) \Rightarrow \exists z.Q(g(z), n)}{\forall x.Q(x, g(m)) \Rightarrow \exists z.Q(g(z), m)}\,\forall_e}{Q(g(m), g(m)) \Rightarrow \exists z.Q(g(z), m)}\,\forall_e \qquad \dfrac{\forall m.Q(g(m), g(m))}{Q(g(m), g(m))}\,\forall_e}{\exists z.Q(g(z), m)}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{[Q(g(w), m)]}{\exists z.Q(z, m)}\,\exists_i}{\exists z.Q(z, m)}\,\exists_e$$

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 2**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/01/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L3 (5 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se la Ferragni perderà gli sponsor o l'uovo di Pasqua è stato una truffa, allora il danno economico sarà ingente. La Ferragni è in buona fede se è stata mal consigliata. Se la Ferragni non è in buona fede, allora l'uovo di Pasqua è stato una truffa o è stata mal consigliata. La Ferragni non perderà gli sponsor o l'uovo di Pasqua è stato una truffa. Quindi il danno economico sarà ingente o la Ferragni è in buona fede.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

$$E \lor C \Rightarrow D, \quad B \Rightarrow A, \quad \neg A \Rightarrow C \lor B, \quad \neg E \lor C \vdash D \lor A$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{A \lor \neg A}\,EM \quad \dfrac{[A]}{D\lor A}\,\lor_{i1} \quad \dfrac{\dfrac{E\lor C \Rightarrow D \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \Rightarrow C\lor B \quad [\neg A]}{C \lor B}\Rightarrow_e \quad [C] \quad \dfrac{\dfrac{[\neg A] \quad \dfrac{B\Rightarrow A \quad [B]}{A}\Rightarrow_e}{\bot}\neg_e}{C}\bot_e}{C}\lor_e}{E\lor C}\lor_{i1}}{D}\Rightarrow_e}{D\lor A}\lor_{i2}}{D\lor A}\lor_e$$

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 2**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/01/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L4 (5 punti). Considerate la seguente sintassi per liste di numeri naturali: $L ::= [] \mid \mathbb{N} :: L$ dove "::" è associativo a destra.

Considerate il seguente predicato $Only_1$, definito per induzione strutturale sulle liste di numeri naturali, che è logicamente equivalente a $\top$ sse la lista in argomento contiene solamente degli 1:

$$\begin{array}{lcl} Only_1([]) & = & \top \\ Only_1(n :: l) & = & n = 1 \land Only_1(l) \end{array}$$

(a) Definire per ricorsione strutturale una funzione $mul(l)$ che calcola il prodotto di tutti i numeri naturali della lista l.
Esempio: $mul(2 :: 1 :: 1 :: 3 :: 1 :: []) = 6$

(b) Dimostrare per induzione strutturale che $\forall l.(Only_1(l) \iff mul(l) = 1)$. Preferire una prova intuizionista a una classica ove possibile.

Nello svolgere l'esercizio potete utilizzare come date l'operazione di somma fra numeri naturali, le proprietà dell'uguaglianza e il lemma L sui numeri naturali che dice $\forall n, m.(n * m = 1 \iff n = 1 \land m = 1)$.

(a) Parte di ricorsione strutturale:

$$\begin{array}{lcl} mul([]) & = & 1 \\ mul(n :: l) & = & n * mul(l) \end{array}$$

(b) Parte di induzione strutturale:

Teorema: $\forall l.(Only_1(l) \iff mul(l) = 1)$.

Dimostrazione: procediamo per induzione strutturale su l per dimostrare $Only_1(l) \iff mul(1) = 1$

- Caso $[]$: dobbiamo dimostrare $Only_1([]) \iff mul([]) = 1$ o, equivalentemente, $\top \iff 1 = 1$. Ovvio per la proprietà riflessiva dell'uguaglianza.
- Caso $n :: l$: per ipotesi induttiva $Only_1(l) \iff mul(l) = 1$ (II). Dobbiamo dimostrare $Only_1(n :: l) \iff mul(n :: l) = 1$ o, equivalentemente, $n = 1 \wedge Only_1(l) \iff n * mul(l) = 1$. Dimostriamo entrambe le direzioni:
  - Dimostriamo $n = 1 \wedge Only_1(l) \Rightarrow n * mul(l) = 1$. Supponiamo $n = 1$ (H1) e $Only_1(l)$ (H2). Da II e H2 si ha $mul(l) = 1$. Quindi, per L e H1, si ha $n * mul(l) = 1$
  - Dimostriamo $n * mul(l) = 1 \Rightarrow n = 1 \wedge Only_1(l)$. Supponiamo $n * mul(l) = 1$ da cui, per il lemma L, $n = 1$ (H1) e $mul(l) = 1$ (H2). Da II e H2 si ha $Only_1(l)$. Quindi, per L, si ha $n = 1 \wedge Only_1(l)$

Qed.

Cognome ______________________ Nome ______________________

Matricola ______________________ Numero di CFU ________ Fila 2

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/01/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

A5 (2 punti). Sia $(X, \circ, e, ^{-1})$ un gruppo, con operazione binaria $\circ$, elemento neutro e, ed operazione unaria $^{-1}$. Dimostra che $a \circ b = a \circ c$ implica $b = c$. Esplicitare l'enunciato di tutti gli assiomi della teoria dei gruppi che vengono utilizzati nella dimostrazione (ad esempio: associativitá di $\circ$).

Visto che $a \circ b = a \circ c$, abbiamo $a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$. Per associativitá di $\circ$, $(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c$. Usando l'assioma $a^{-1} \circ a = e$, ne consegue che $e \circ b = e \circ c$. Infine, usando l'assioma per l'elemento neutro e, abbiamo che $b = c$.

A6 (2 punti). Considera il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, 0, ^{-1})$ degli interi modulo 3. Ovvero, $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ e abbiamo ad esempio $1 + 2 = 0$ e $2 + 2 = 1$. Il teorema di Cayley dice che questo gruppo é isomorfo ad un sottogruppo $\mathbb{X}$ di $(Perm(\mathbb{Z}_3), \circ, id, ^{-1})$, il gruppo delle permutazioni su $\mathbb{Z}_3$.

(a) Scrivi la definizione della permutazione che l'isomorfismo associa all'elemento 1 di $\mathbb{Z}_3$.

(b) Scrivi la definizione di una permutazione (un elemento di $Perm(\mathbb{Z}_3)$) che *non* fa parte di $\mathbb{X}$.

- La permutazione definita come segue

$$0 \mapsto 1 \quad 1 \mapsto 2 \quad 2 \mapsto 0$$

- Ad esempio la permutazione π definita come

$$0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 2 \quad 2 \mapsto 1$$

A7 (6 punti). Per ciascuno dei seguenti enunciati, indica se é vero o falso. Se falso, scrivi un controesempio.

	Linguaggio	V	F (scrivi controesempio)
(a)	$(\mathbb{N}, min, 0, ^\star)$, dove $min(n, m)$ é il piú piccolo tra n ed m, e $n^\star = n$, forma un gruppo.		
(b)	Considera il monoide $(\mathbb{L}, ++, [])$ dove $\mathbb{L}$ é l'insieme di liste di numeri naturali, $++$ é la concatenazione di liste, e $[]$ é la lista vuota. La funzione $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ definita come $f(l) = 0 :: l$ é un morfismo di monoidi da $(\mathbb{L}, ++, [])$ a $(\mathbb{L}, ++, [])$.		
(c)	$(5\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}, +, 0)$, dove $5\mathbb{N}$ é l'insieme dei multipli di 5 in $\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}$ é l'insieme dei multipli di 3 in $\mathbb{N}$, e $5\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$ é la loro intersezione, forma un monoide.		
(d)	$(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset, \cap)$, dove $\mathcal{P}(X)$ é l'insieme dei sottoinsiemi di un dato insieme X, é un semianello.		
(e)	$(\mathbb{R}, \times, 0)$ forma un monoide.		
(f)	Il magma $(\mathbb{R}_+, +)$, dove $\mathbb{R}_+$ é l'insieme dei numeri reali positivi (maggiori di 0) e $+$ é l'addizione, puó essere esteso ad un monoide.		

(a) No perché $min(n, n^\star) = min(n, n) = n$ é diverso da 0 per $n \neq 0$.

(b) No, ad esempio $f([1, 2] + +[1]) = [0, 1, 2, 1]$ ma $f([1, 2]) + +f([1]) = [0, 1, 2, 0, 1]$.

(c) Si.

(d) Si

(e) No, 0 non é l'elemento neutro per $\times$.

(f) No perché per ogni coppia di reali $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 > r_1$, quindi non c'é elemento neutro.