

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____ Numero di CFU _____ Fila 1

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/01/2024**

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L1 (5 punti). Dimostrare in teoria degli insiemi che $\forall A, B. ((\forall C. C \cap A \subseteq B) \Rightarrow A \subseteq B)$. Ogni passaggio deve abbreviare uno o più passi di deduzione naturale al prim'ordine.

Esplicitare l'enunciato di tutti gli assiomi utilizzati.

Assioma dell'intersezione binaria: $\forall A, B, X. (X \in A \cap B \iff X \in A \wedge X \in B)$

Teorema: $\forall A, B. ((\forall C. C \cap A \subseteq B) \Rightarrow A \subseteq B)$

Dimostrazione: siano A, B insiemi t.c. $\forall C. C \cap A \subseteq B$ o, equivalentemente, $\forall C, X. (X \in C \cap A \Rightarrow X \in B)$ (H). Dobbiamo dimostrare $A \subseteq B$ o, equivalentemente, $\forall Y. (Y \in A \Rightarrow Y \in B)$. Sia Y insieme t.c. $Y \in A$ (K). Dobbiamo dimostrare $Y \in B$. Da K e l'assioma dell'intersezione binaria si ha $Y \in A \cap A$. Quindi, per H, $Y \in B$. Qed.

L2 (5 punti). Dimostrare in deduzione naturale per la logica al prim'ordine il seguente enunciato. Preferire una prova intuizionista a una classica ove possibile.

$$\forall n, m. (P(f(n), m) \Rightarrow \exists z. P(n, f(z))), \quad \forall m. P(f(m), f(m)) \vdash \exists z. P(m, z)$$

$$\frac{\frac{\frac{\forall n, m. P(f(n), m) \Rightarrow \exists z. P(n, f(z))}{\forall x. P(f(m), x) \Rightarrow \exists z. P(m, f(z))} \forall_e}{P(f(m), f(m)) \Rightarrow \exists z. P(m, f(z))} \forall_e}{\exists z. P(m, f(z))} \Rightarrow_e \quad \frac{\frac{\forall m. P(f(m), f(m))}{P(f(m), f(m))} \forall_e}{\Rightarrow_e} \quad \frac{[P(m, f(w))]}{\exists z. P(m, z)} \exists_i}{\exists z. P(m, z)} \exists_e$$

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____ Numero di CFU _____ Fila 1

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/01/2024**

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L3 (5 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se la Ferragni non è in buona fede, allora è stata mal consigliata o il pandoro è stato una truffa. La Ferragni è in buona fede se è stata mal consigliata. La Ferragni non dovrà pagare una multa salata o il pandoro è stato una truffa. Se il pandoro è stato una truffa o la Ferragni dovrà pagare una multa salata, allora il danno economico sarà ingente. Quindi la Ferragni è in buona fede o il danno economico sarà ingente.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

$\neg A \Rightarrow B \vee C, \quad B \Rightarrow A, \quad \neg E \vee C, \quad C \vee E \Rightarrow D \vdash A \vee D$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \frac{A \vee \neg A}{EM} \quad \frac{[A]}{A \vee D} \vee_{i1} \quad \frac{C \vee E \Rightarrow D}{A \vee D} \vee_e \quad \frac{D}{A \vee D} \vee_{i2} \quad \frac{C}{C \vee E} \vee_{i1} \Rightarrow_e \quad \frac{[C]}{\vee_e} \\
 \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\neg A \Rightarrow B \vee C}{B \vee C} \Rightarrow_e \quad \frac{[\neg A]}{\perp} \perp_e \quad \frac{B \Rightarrow A \quad [B]}{A} \Rightarrow_e}{\neg_e}}{[\neg A]}}{\perp} \perp_e \quad [C]}{\vee_e} \\
 \frac{A \vee \neg A}{EM} \quad \frac{[A]}{A \vee D} \vee_{i1} \quad \frac{C \vee E \Rightarrow D}{A \vee D} \vee_e \quad \frac{D}{A \vee D} \vee_{i2} \quad \frac{C}{C \vee E} \vee_{i1} \Rightarrow_e \quad \frac{[C]}{\vee_e}
 \end{array}$$

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____ Numero di CFU _____ Fila 1

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/01/2024**

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L4 (5 punti). Considerate la seguente sintassi per liste di numeri naturali: $L ::= [] \mid \mathbb{N} :: L$ dove “ $::$ ” è associativo a destra.

Considerate il seguente predicato $Only_0$, definito per induzione strutturale sulle liste di numeri naturali, che è logicamente equivalente a \top sse la lista in argomento contiene solamente degli 0:

$$\begin{aligned} Only_0([]) &= \top \\ Only_0(n :: l) &= n = 0 \wedge Only_0(l) \end{aligned}$$

- (a) Definire per ricorsione strutturale una funzione $sum(l)$ che calcola la somma di tutti i numeri naturali della lista l .
Esempio: $sum(2 :: 0 :: 1 :: 3 :: 0 :: []) = 6$
- (b) Dimostrare per induzione strutturale che $\forall l.(Only_0(l) \iff sum(l) = 0)$. Preferire una prova intuizionista a una classica ove possibile.

Nello svolgere l'esercizio potete utilizzare come date l'operazione di somma fra numeri naturali, le proprietà dell'uguaglianza e il lemma L sui numeri naturali che dice $\forall n, m.(n + m = 0 \iff n = 0 \wedge m = 0)$.

(a) Parte di ricorsione strutturale:

$$sum([]) = 0$$

$$sum(n :: l) = n + sum(l)$$

(b) Parte di induzione strutturale:

Teorema: $\forall l. (Only_0(l) \iff sum(l) = 0)$.

Dimostrazione: procediamo per induzione strutturale su l per dimostrare $Only_0(l) \iff sum(l) = 0$

- Caso $[]$: dobbiamo dimostrare $Only_0([]) \iff sum([]) = 0$ o, equivalentemente, $\top \iff 0 = 0$. Ovvio per la proprietà riflessiva dell'uguaglianza.
- Caso $n :: l$: per ipotesi induttiva $Only_0(l) \iff sum(l) = 0$ (II). Dobbiamo dimostrare $Only_0(n :: l) \iff sum(n :: l) = 0$ o, equivalentemente, $n = 0 \wedge Only_0(l) \iff n + sum(l) = 0$. Dimostriamo entrambe le direzioni:
 - Dimostriamo $n = 0 \wedge Only_0(l) \Rightarrow n + sum(l) = 0$. Supponiamo $n = 0$ (H1) e $Only_0(l)$ (H2). Da II e H2 si ha $sum(l) = 0$. Quindi, per L e H1, si ha $n + sum(l) = 0$
 - Dimostriamo $n + sum(l) = 0 \Rightarrow n = 0 \wedge Only_0(l)$. Supponiamo $n + sum(l) = 0$ da cui, per il lemma L, $n = 0$ (H1) e $sum(l) = 0$ (H2). Da II e H2 si ha $Only_0(l)$. Quindi, per L, si ha $n = 0 \wedge Only_0(l)$

Qed.

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____ Numero di CFU _____ Fila 1

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/01/2024

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

A5 (2 punti). Considera il gruppo $(\mathbb{Z}_3, +, 0, ^{-1})$ degli interi modulo 3. Ovvero, $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ e abbiamo ad esempio $1 + 2 = 0$ e $2 + 2 = 1$. Il teorema di Cayley dice che questo gruppo é isomorfo ad un sottogruppo \mathbb{X} di $(Perm(\mathbb{Z}_3), \circ, id, ^{-1})$, il gruppo delle permutazioni su \mathbb{Z}_3 .

- (a) Scrivi la definizione della permutazione che l'isomorfismo associa all'elemento 1 di \mathbb{Z}_3 .
(b) Scrivi la definizione di una permutazione (un elemento di $Perm(\mathbb{Z}_3)$) che *non* fa parte di \mathbb{X} .

- La permutazione definita come segue

$$0 \mapsto 1 \quad 1 \mapsto 2 \quad 2 \mapsto 0$$

- Ad esempio la permutazione π definita come

$$0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 2 \quad 2 \mapsto 1$$

A6 (2 punti). Sia $(X, \circ, e, ^{-1})$ un gruppo, con operazione binaria \circ , elemento neutro e , ed operazione unaria $^{-1}$. Dimostra che $a \circ b = a \circ c$ implica $b = c$. Esplicitare l'enunciato di tutti gli assiomi della teoria dei gruppi che vengono utilizzati nella dimostrazione (ad esempio: associatività di \circ).

Visto che $a \circ b = a \circ c$, abbiamo $a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$. Per associatività di \circ , $(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c$. Usando l'assioma $a^{-1} \circ a = e$, ne consegue che $e \circ b = e \circ c$. Infine, usando l'assioma per l'elemento neutro e , abbiamo che $b = c$.

A7 (6 punti). Per ciascuno dei seguenti enunciati, indica se é vero o falso. Se falso, scrivi un controesempio.

	Linguaggio	V	F (scrivi controesempio)
(a)	$(\mathbb{R}, \times, 0)$ forma un monoide.		
(b)	$(\mathbb{N}, \min, 0, *)$, dove $\min(n, m)$ é il piú piccolo tra n ed m , e $n^* = n$, forma un gruppo.		
(c)	Considera il monoide $(\mathbb{L}, ++, [])$ dove \mathbb{L} é l'insieme di liste di numeri naturali, $++$ é la concatenazione di liste, e $[]$ é la lista vuota. La funzione $f: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ definita come $f(l) = 0 :: l$ é un morfismo di monoidi da $(\mathbb{L}, ++, [])$ a $(\mathbb{L}, ++, [])$.		
(d)	$(5\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}, +, 0)$, dove $5\mathbb{N}$ é l'insieme dei multipli di 5 in \mathbb{N} , $3\mathbb{N}$ é l'insieme dei multipli di 3 in \mathbb{N} , e $5\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$ é la loro intersezione, forma un monoide.		
(e)	Il magma $(\mathbb{R}_+, +)$, dove \mathbb{R}_+ é l'insieme dei numeri reali positivi (maggiori di 0) e $+$ é l'addizione, puó essere esteso ad un monoide.		
(f)	$(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset, \cap)$, dove $\mathcal{P}(X)$ é l'insieme dei sottoinsiemi di un dato insieme X , é un semianello.		

(a) No, 0 non é l'elemento neutro per \times .

(b) No perché $\min(n, n^*) = \min(n, n) = n$ é diverso da 0 per $n \neq 0$.

(c) No, ad esempio $f([1, 2] ++ [1]) = [0, 1, 2, 1]$ ma $f([1, 2]) ++ f([1]) = [0, 1, 2, 0, 1]$.

(d) Si.

(e) No perché per ogni coppia di reali $r_1, r_2 > 0$, $r_1 + r_2 > r_1$, quindi non c'è elemento neutro.

(f) Si