Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 14/09/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L1 (2 punti). Riscrivere le seguenti due formule in formule logicamente equivalenti che utilizzano le negazioni solamente attorno a formule atomiche (predicati).

(a) $\neg(A \vee B \to C)$

(b) $\neg\exists x \forall y (x > y)$

(a) $\neg A \wedge B \wedge \neg C$

(b) $\forall x \exists y (x \not> y)$

L2 (6 punti). Considerare le seguente funzioni, definite per ricorsione strutturale su liste e numeri definiti dalle grammatiche $L ::= [] \mid X :: L$, $N ::= O \mid SN$ dove il non terminale X genera gli elementi delle liste:

[] @ L = L	flatten [] = []
(X::XS) @ L = X : (XS @ L)	flatten (L::LS) = L @ flatten LS
make O L = []	|[]| = O
make (S N) L = L :: make N L	|X::XS| = S (|XS|)

Per ogni lista L, dimostrare, per induzione strutturale su N, che |flatten (make N L)| $= N * |L|$. Per farlo:

(a) assumere l'usuale definizione e le usuali proprietà della somma e prodotto sui numeri naturali

(b) per completare la dimostrazione è necessario identificare un lemma che metta in relazione le funzioni @ e $|\cdot|$. Enunciare il lemma senza dimostrarlo. Il lemma può essere utilizzato nella dimostrazione del teorema.

Lemma 1: $\forall L, M. |L@M| = |L| + |M|$.

Teorema: $\forall L, N. |flatten\ (make\ N\ L)| = N * |L|$.
Dimostrazione: Sia L fissata. Procediamo per induzione su N per dimostrare $|flatten\ (make\ N\ L)| = N * |L|$.

- Caso []: dobbiamo dimostrare $|flatten\ (make\ O\ L)| = O * |L|$, o equivalentemente $O = O$. Ovvio.
- Caso SN. Per ipotesi induttiva $|flatten\ (make\ N\ L)| = N * |L|$ (II). Dobbiamo dimostrare $|flatten\ (make\ (S\ N)\ L)| = (S\ N) * |L|$, ovvero $|L@flatten\ (make\ N\ L)| = |L| + N * |L|$. Per il lemma 1, ci riduciamo a dimostrare $|L| + |flatten\ (make\ N\ L)| = |L| + N * |L|$. Ovvio per II.

Qed.

Cognome ______________________________ **Nome** ______________________________

Matricola ______________________________ **Numero di CFU** ________

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 14/09/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L3 (6 punti). Sia U un insieme fissato per l'intera durata dell'esercizio, chiamato insieme universo, e sia $X^\neg \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in U \mid A \notin X\}$, chiamato insieme complementare a X rispetto all'insieme universo U.

Dimostrare in teoria assiomatica degli insiemi che per ogni insieme A, B, C, se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C^\neg$, allora $A \cap B = \emptyset$.

Prima della dimostrazione riportare l'**enunciato di tutti gli assiomi di teoria degli insiemi che usate nella dimostrazione**.

La dimostrazione deve essere una dimostrazione valida in logica del prim'ordine, ovvero ogni passaggio deve corrispondere a uno o più passaggi di deduzione naturale classica o intuizionista. Preferire una prova intuizionista ove possibile.

Assioma di estensionalità: $A = B \iff \forall X. X \in A \iff X \in B$
Assioma dell'intersezione binaria: $X \in A \cap B \iff X \in A \wedge X \in B$
Assioma dell'insieme vuoto: $X \notin \emptyset$
Assioma di separazione: $X \in \{Y \in A \mid P(Y)\} \iff X \in A \wedge P(X)$

Teorema: $\forall A, B, C. A \subseteq C \wedge B \subseteq C^\neg \Rightarrow A \cap B = \emptyset$. Dimostrazione: siano A, B, C insiemi t.c. $A \subseteq C$, ovvero $\forall X, X \in A \Rightarrow X \in C$, (H1) e $B \subseteq C^\neg$, ovvero $\forall X, X \in B \Rightarrow X \in C^\neg$ (H2). Dobbiamo dimostrare che $A \cap B = \emptyset$. Per l'assioma di estensionalità ci riduciamo a dimostrare $\forall X, X \in A \cap B \iff X \in \emptyset$. Sia X un insieme. Dimostriamo entrambe le direzioni:

- $X \in \emptyset \Rightarrow X \in A \cap B$: assumiamo $X \in \emptyset$ (K). Per l'assioma dell'insieme vuoto, $X \notin \emptyset$. Quindi, per (K), assurdo. Quindi $X \in A \cap B$
- $X \in A \cap B \Rightarrow X \in \emptyset$: assumiamo $X \in A \cap B$. Quindi, per l'assioma dell'intersezione binaria, $X \in A$ (K1) e $X \in B$ (K2). Da (K1) e (H1) si ha $X \in C$ (L1). Da (K2) e (H2) si ha $X \in C^\neg$, ovvero $X \in \{Y \in U \mid Y \notin C\}$. Quindi, per l'assioma di separazione, $X \in U$ e $X \notin C$. Quindi, per (L1), assurdo. Quindi $X \in \emptyset$.

Qed.

Cognome ______________________ Nome ______________________

Matricola ______________________ Numero di CFU ________

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 14/09/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L4 (6 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se l'impianto di climatizzazione perderà acqua o quello elettrico salterà, allora apriremo un ticket e la sala dottorandi non aprirà. Quando l'impianto di climatizzatore perde acqua, quello elettrico salta. Se apriremo la sala dottorandi, l'impianto di climatizzazione perderà acqua e un ticket verrà aperto. Quindi la sala dottorandi non aprirà o l'impianto elettrico salterà.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

$$A \lor B \Rightarrow C \land \neg D, \quad A \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow A \land C \quad \vdash \quad \neg D \lor B$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \lor B \Rightarrow C \land \neg D \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{D \Rightarrow A \land C \qquad [D]}{A \land C}\Rightarrow_e}{A}\land_{e_1}}{A \lor B}\lor_{i_1}}{C \land \neg D}\Rightarrow_e}{\neg D}\land_{e_2} \qquad [D]}{\bot}\neg_e}{\dfrac{\neg D}{\neg D \lor B}\lor_{i_1}}\neg_i$$

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 14/09/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

A5 (7 punti). Per ciascuno dei seguenti enunciati, indica se é vero o falso. Se falso, scrivi un controesempio.

	Linguaggio	V	F (scrivi controesempio)
(a)	$(\mathbb{N}, max, 0, ^\star)$, dove $max(n, m)$ é il piú grande tra n ed m, e $n^\star = n$, forma un gruppo.		
(b)	$(\mathbb{L}(X), +, [])$, dove X é un insieme, $\mathbb{L}$ é l'insieme delle liste di elementi di X, $+$ é l'operazione di concatenazione di due liste, $[]$ é la lista vuota, forma un monoide abeliano.		
(c)	L'immagine di un morfismo f di anelli é un sottoanello del codominio di f.		
(d)	$(\mathbb{N}, +, 0)$ é un sottomonoide di $(\mathbb{R}, +, 0)$.		
(e)	Se $(\mathbb{M}, \circ, e)$ é un semigruppo e $\mathbb{M}_1$ é un sottoinsieme di $\mathbb{M}$, allora $(\mathbb{M}_1, \circ, e)$ é sempre un semigruppo.		
(f)	$(2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}, +, 0)$, dove $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$ é l'intersezione di $2\mathbb{N}$ e $3\mathbb{N}$, forma un monoide.		
(g)	$(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset, (X \setminus \cdot), \cap)$, dove $\mathcal{P}(X)$ é l'insieme dei sottoinsiemi di X e $(X \setminus \cdot) \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é l'operazione unaria definita come $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$, é un anello.		

(a) No perché $max(n, n^\star) = max(n, n) = n$ é diverso da 0 per $n \neq 0$.

(b) No, l'operazione non é commutativa.

(c) Si.

(d) Si

(e) No, $\mathbb{M}_1$ potrebbe non essere chiuso sotto l'operazione $\circ$.

(f) Si

(g) No, $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset, (X \setminus \cdot))$ non forma un gruppo dal momento che $Y \cup (X \setminus Y) \neq \emptyset$.

A6 (3 punti). Considera il monoide $(\mathbb{X}, \circ, A)$, dove $\mathbb{X} = \{A, B, C\}$, e le operazioni sono definite come segue.

$$\begin{array}{ccc} A \circ A = A & A \circ B = B & A \circ C = C \\ B \circ A = B & B \circ B = C & B \circ C = A \\ C \circ A = C & C \circ B = A & C \circ C = B \end{array}$$

(a) Definisci l'operazione unaria $^{-1}$ in modo tale che $(\mathbb{X}, \circ, A, ^{-1})$ formi un gruppo.

(b) Il teorema di Cayley associa a questo gruppo un gruppo di permutazioni, chiamiamolo G. Dai una definizione di tutti gli elementi di G.

(c) Qual é una permutazione su $\mathbb{X}$ che *non* appartiene a G?

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 14/09/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

(a)

$$A^{-1} = A \qquad B^{-1} = C \qquad C^{-1} = B$$

(b) Il teorema di Cayley associa a questo gruppo il gruppo $(\{\pi_A, \pi_B, \pi_C\}, \circ, \pi_A, ^{-1})$. Gli elementi sono le permutazioni

$$\pi_A\colon A \mapsto A \quad B \mapsto B \quad C \mapsto C$$
$$\pi_B\colon A \mapsto B \quad B \mapsto C \quad C \mapsto A$$
$$\pi_C\colon A \mapsto C \quad B \mapsto A \quad C \mapsto B$$

(c) Una permutazione che non appartiene a questo gruppo é ad esempio

$$\pi\colon A \mapsto A \quad B \mapsto C \quad C \mapsto B$$