Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 13/07/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L1 (2 punti). Riscrivere le seguenti due formule in formule logicamente equivalenti che utilizzano le negazioni solamente attorno a formule atomiche (predicati).

(a) $\neg \forall x \in A\, \exists y \in A (x < y \wedge x > y)$

(b) $\neg \forall x (x > 0 \Rightarrow x - 1 > 0)$

(a) $\exists x \in A\, \forall y \in A (x \not< y \vee x \not> y)$

(b) $\exists x.(x > 0 \wedge x - 1 \not> 0)$

L2 (6 punti). In questo esercizio rappresenteremo gli insiemi come liste. Due liste verranno considerate uguali come insiemi se contengono gli stessi elementi a meno dell'ordine e delle molteplicità ripetute. Esempio: $1 : 2 : 1 : []$ e $2 : 1 : []$ sono considerate equivalenti quando viste come insiemi.

Problema: sia L una lista di numeri primi (in questo caso la molteplicità conta!). Calcolare l'insieme di tutti i fattori di $\Pi_{j \in L} j$ (la produttoria di tutti i numeri in L, che fa 1 quando L è vuota).
Esempio: se $L = 2 : 3 : 2 : 5 : []$ allora $\Pi_{j \in L} j = 2 * 3 * 2 * 5 = 60$ e la soluzione è l'insieme $1 : 2 : 3 : 6 : 2 : 4 : 6 : 12 : 5 : 10 : 15 : 30 : 10 : 20 : 30 : 60 : []$ (o una qualunque altra lista equivalente a questa come insieme, per esempio quella ottenuta eliminando i duplicati).

Risolvere il problema utilizzando la ricorsione strutturale e mostrare l'esecuzione del codice sul precedente esempio.

Suggerimento: la soluzione più breve è di sole 4 righe di codice.

Nuovo problema: dato un numero h e una lista di numeri l, restituire la lista contenente tutti i numeri in l e tutti quelli ottenuti moltiplicando h con un numero in l.

Soluzione: `g` h l

```
g h [] = []
g h (x:l) = x:(h*x):g h l
```

Soluzione al problema originale: `f` L.

```
f [] = 1 : []
f (h:t) = g k (f t)
```

Esempio di esecuzione: `f` (2:3:2:5:[]) = g 2 (f (3:2:5:[])) = ... = g 2 (g 3 (g 2 (g 5 []))) = = g 2 (g 3 (g 2 (g 5 (1:[])))) = g 2 (g 3 (g 2 (1:5:[]))) = g 2 (g 3 (1:2:5:10:[])) = g 2 (1:3:2:6:5:15:10:30:[])) = 1:2:3:6:2:4:6:12:5:10:15:30:10:20:30:60:[]

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 13/07/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L3 (6 punti). Definiamo il predicato "essere chiuso verso il basso" di insiemi, indicato come $\downarrow$, come segue:

$$X\downarrow \stackrel{\text{def}}{=} \forall A, B(A \in X \land B \subseteq A \Rightarrow B \in X)$$

Dimostrare in teoria assiomatica degli insiemi che:

$$\forall X, Y(X\downarrow \cap Y\downarrow \Rightarrow (X \cap Y)\downarrow)$$

Prima della dimostrazione riportare l'**enunciato di tutti gli assiomi di teoria degli insiemi che usate nella dimostrazione**.

La dimostrazione deve essere una dimostrazione valida in logica del prim'ordine, ovvero ogni passaggio deve corrispondere a uno o più passaggi di deduzione naturale classica o intuizionista. Preferire una prova intuizionista ove possibile.

Assioma dell'intersezione binaria: $\forall A, B, C. A \in B \cap C \iff A \in B \land A \in C$

Teorema: $\forall X, Y(X\downarrow \land Y\downarrow \Rightarrow (X \cap Y)\downarrow)$ Dimostrazione: siano X, Y insiemi t.c. $X\downarrow$ o, equivalentemente, $\forall A, B(A \in X \land B \subseteq A \Rightarrow B \in X)$ (KX) e $Y\downarrow$ o, equivalentemente, $\forall A, B(A \in Y \land B \subseteq A \Rightarrow B \in Y)$ (KY). Dobbiamo dimostrare $(X \cap Y)\downarrow$ o, equivalentemente, $\forall A, B(A \in X \cap Y \land B \subseteq A \Rightarrow B \in X \cap Y)$. Siano A, B insiemi t.c. $A \in X \cap Y$ (L1) e $B \subseteq A$ (L2). Da L1, per l'assioma dell'intersezione binaria, si ha $A \in X$ (HX) e $A \in Y$ (HY). Da KX, HX, L2 si ha $B \in X$ (FX). Da KY, HY, L2 si ha $B \in Y$ (FY). Da FX, FY e l'assioma di intersezione binaria si ha $B \in X \cap Y$. Qed.

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 13/07/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L4 (6 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se l'elettricista termina la cablatura, ma non si fanno le pulizie di cantiere in tempo, allora rimandiamo il trasloco o ci si trasferisce fra i calcinacci. Sarà un miracolo se si fanno in tempo le pulizie di cantiere e l'elettricista termina la cablatura. Non ci si trasferisce fra i calcinacci e l'elettricista termina di cablare. Quindi, se non rimandiamo il trasloco, sarà un miracolo.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

$$A \land \neg B \Rightarrow C \lor D; \quad B \land A \Rightarrow E; \quad \neg D \land A \quad \vdash \quad \neg C \Rightarrow E$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$B \land A \Rightarrow E$}
\AxiomC{$A \land \neg B \Rightarrow C \lor D$}
\AxiomC{$\neg D \land A$}
\RightLabel{$\land_{e2}$}
\UnaryInfC{A}
\AxiomC{$[\neg B]$}
\RightLabel{$\land_i$}
\BinaryInfC{$A \land \neg B$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$C \lor D$}
\AxiomC{$[\neg C]$}
\AxiomC{$[C]$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$\neg D \land A$}
\RightLabel{$\land_{e1}$}
\UnaryInfC{$\neg D$}
\AxiomC{$[D]$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\lor_e$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{B}
\AxiomC{$\neg D \land A$}
\RightLabel{$\land_{e2}$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$\land_i$}
\BinaryInfC{$B \land A$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{E}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$\neg C \Rightarrow E$}
\end{prooftree}
$$

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 13/07/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

A5 (7 punti). Per ciascuno dei seguenti enunciati, indica se é vero o falso. Se falso, scrivi un controesempio.

	Linguaggio	V	F (scrivi controesempio)
(a)	$(\mathbb{N}, \div, 1)$, dove $\div$ é la divisione, forma un monoide.		
(b)	$(\mathbb{L}, +, [])$, dove $\mathbb{L}$ é l'insieme delle liste di numeri naturali, $+$ é l'operazione di concatenazione di due liste, $[]$ é la lista vuota, forma un monoide abeliano.		
(c)	L'immagine di un morfismo f di semigruppi é un sottosemigruppo del codominio di f.		
(d)	$(\mathbb{N}, +, 0)$ é un sottomonoide di $(\mathbb{R}, +, 0)$.		
(e)	Se $(\mathbb{M}, \circ, e)$ é un monoide e $\mathbb{M}_1$ é un sottoinsieme di $\mathbb{M}$ tale che $e \in \mathbb{M}_1$, allora $(\mathbb{M}_1, \circ, e)$ é sempre un monoide.		
(f)	$(\mathbb{N}, z, 0, ^\star)$, dove $z(n, m) = 0$ e $n^\star = n$, forma un gruppo.		
(g)	$(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset, (X \setminus \cdot), \cap)$, dove $\mathcal{P}(X)$ é l'insieme dei sottoinsiemi di X e $(X \setminus \cdot) \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é l'operazione unaria definita come $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$, é un anello.		

(a) No perché $\mathbb{N}$ non é chiuso sotto divisione.

(b) No, l'operazione non é commutativa.

(c) Si.

(d) Si

(e) No, $\mathbb{M}_1$ potrebbe non essere chiuso sotto l'operazione $\circ$.

(f) No, perché $z(n, 0) = 0 = z(0, n)$ quindi 0 non é l'elemento neutro per z.

(g) No, $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset, (X \setminus \cdot))$ non forma un gruppo dal momento che $Y \cup (X \setminus Y) \neq \emptyset$.

A6 (3 punti). Dimostra che se $(\mathbb{A}, \circ_A, e_A)$ e $(\mathbb{B}, \circ_B, e_B)$ sono monoidi, allora il prodotto cartesiano $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ ha anch'esso struttura di monoide. (Aiuto: il primo passo é definire un'operazione binaria $\circ_{A\times B}$ e specificare un elemento $e_{A\times B}$ dell'insieme $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$).

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 13/07/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

Si vedano slides 22 e 23 della seconda lezione di algebra.