Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 09/06/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L1 (2 punti). (a) Dare la definizione di modello di un insieme di formule Γ

(b) Dare la definizione della relazione "avere la stessa cardinalità"

(a) un modello è un mondo v t.c. v soddisfa ognuna delle formule in Γ, i.e. $[\![F]\!]^v = 1$ per ogni $F \in \Gamma$

(b) Due insieme hanno la stessa cardinalità sse esiste una biiezione fra di essi

L2 (6 punti). Considerare le seguenti funzioni (dove la f prende in input un naturale e una lista di naturali e le altre due funzioni prendono in input liste di naturali).

$$\begin{array}{l|l|l} f(n, []) = [] & |[]| = 0 & \Sigma([]) = 0 \\ f(n, h :: t) = h :: (n+h) :: f(n,t) & |h :: t| = 1 + |t| & \Sigma(h :: t) = h + \Sigma(t) \end{array}$$

Dimostrare, per induzione strutturale su l, che $\forall l.\forall n.\Sigma(f(n,l)) = 2\Sigma(l) + n|l|$, assumendo le usuali proprietà della somma e del prodotto su naturali.

Teorema: $\forall l.\forall n.\Sigma(f(n,l)) = 2\Sigma(l) + n|l|$.
Dimostrazione:
procediamo per induzione strutturale su l per dimostrare $\forall n.\Sigma(f(n,l)) = 2\Sigma(l) + n|l|$.

- Caso []: dobbiamo dimostrare $\forall n.\Sigma(f(n,[])) = 2\Sigma([]) + n|[]|$ che è equivalente a $\forall n.0 = 2*0 + n*0$. Ovvio per le proprietà dell'aritmetica.
- Caso $h :: t$: per ipotesi induttiva sappiamo $\forall n.\Sigma(f(n,t)) = 2\Sigma(l) + n|t|$ (II). Dobbiamo dimostrare $\forall n.\Sigma(f(n, h :: t)) = 2\Sigma(h :: t) + n|h :: t|$, che è equivalente a $\forall n.h + (n+h) + \Sigma(f(n,t)) = 2(h + \Sigma(t)) + n(1 + |t|)$. Sia n un numero naturale. Per (II) ci riduciamo a dimostrare $h + (n+h) + (2\Sigma(t) + n|t|) = 2(h + \Sigma(t)) + n(1 + |t|)$. Ovvio per le proprietà della somma e del prodotto.

qed.

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 09/06/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L3 (6 punti). Dimostrare che, in teoria assiomatica degli insiemi, vale

$$\forall A, B. \emptyset \neq A \cup B \Rightarrow \emptyset \neq A \vee \emptyset \neq B$$

La dimostrazione:

- DEVE essere preceduta/seguita dall'elenco di tutti gli assiomi utilizzati
- ogni passaggio della dimostrazione deve corrispondere a uno o più passi di deduzione naturale al prim'ordine. Evitare equivalenze logiche notevoli e applicazioni del teorema di invarianza per sostituzione
- la dimostrazione potrebbe essere classica, richiedendo excluded middle su una qualche formula o riduzione all'assurdo

Assioma di estensionalità: $\forall A, B. A = B \iff (\forall X. X \in A \iff X \in B)$.
Assioma del vuoto: $\forall X. X \notin \emptyset$.
Assioma dell'unione: $\forall A, B, X. X \in A \cup B \iff X \in A \vee X \in B$.

Teorema: $\forall A, B. \emptyset \neq A \cup B \Rightarrow \emptyset \neq A \vee \emptyset \neq B$
Dimostrazione:
Siano A, B insiemi t.c. $\emptyset \neq A \cup B$ (H). Per l'EM si ha $\emptyset = A \vee \emptyset \neq A$ e $\emptyset = B \vee \emptyset \neq B$. Procediamo per casi:

- Casi $\emptyset \neq A$ (K) o $\emptyset \neq B$ (K): da (K) segue $\emptyset \neq A \vee \emptyset \neq B$
- Caso $\emptyset = A$ (K1) e $\emptyset = B$ (K2). Per (H) e ex-falso, ci riduciamo a dimostrare $\emptyset = A \cup B$ che, per l'assioma di estensionalità, ci permette di ridurci a dimostrare $\forall X. X \in \emptyset \iff X \in A \cup B$. Sia X un insieme. Dimostriamo entrambe le direzioni dell'iff:
  - Dimostriamo $X \in \emptyset \Rightarrow X \in A \cup B$. Supponiamo $X \in \emptyset$. Quindi, per l'assioma del vuoto, assurdo. Quindi $X \in A \cup B$.
  - Dimostriamo $X \in A \cup B \Rightarrow X \in \emptyset$. Supponiamo $X \in A \cup B$. Per l'assioma dell'unione, $X \in A \vee X \in B$. Procediamo per casi:
    - Caso $X \in A$: quindi, per (K1), assurdo. Quindi $X \in A \cup B$.
    - Caso $X \in B$: quindi, per (K2), assurdo. Quindi $X \in A \cup B$.

qed.

Cognome ______________________________ **Nome** __________________________

Matricola ______________________________ **Numero di CFU** _______ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 09/06/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L4 (6 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se l'assassino non confessa o il corpo è ben occulato, allora l'assassino se la cava. Il caso non resta irrisolto o l'assassino non se la cava. Il caso resta irrisolto se l'assassino non confessa. Quindi l'assassino confessa e: 1) il corpo non è ben occultato o 2) il caso non resta irrisolto.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

$$\neg A \vee B \Rightarrow C, \quad \neg D \vee \neg C, \quad \neg A \Rightarrow D \quad \vdash \quad A \wedge (\neg B \vee \neg D)$$

$$\dfrac{\neg D \vee \neg C \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \Rightarrow D \qquad [\neg A]}{D}\Rightarrow_e \qquad [\neg D]}{\bot}\neg_e}{A}RAA \qquad \dfrac{[\neg D]}{\neg B \vee \neg D}\vee_{i2}}{A \wedge (\neg B \vee \neg D)}\wedge_i \qquad \dfrac{\vdots}{A \wedge (\neg B \vee \neg D)}}{A \wedge (\neg B \vee \neg D)}\vee_e$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
[\neg C] \qquad \dfrac{\neg A \vee B \Rightarrow C \qquad \dfrac{[\neg A]}{\neg A \vee B}\,\vee_{i2}}{C}\,\Rightarrow_e
}{\bot}\,\neg_e
}{A}\,RAA
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
[\neg C] \qquad \dfrac{\neg A \vee B \Rightarrow C \qquad \dfrac{[B]}{\neg A \vee B}\,\vee_{i2}}{C}\,\Rightarrow_e
}{\bot}\,\neg_e
}{\neg B}\,\neg_i
}{\neg B \vee \neg D}\,\vee_{i1}
}{A \wedge (\neg B \vee \neg D)}\,\wedge_i
$$

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 09/06/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

A5 (7 punti). Per ciascuno dei seguenti enunciati, indica se é vero o falso. Se falso, scrivi un controesempio.

(a) $(\mathbb{N}, max, 0, ^{\star})$, dove $max(n,m)$ é il numero piú grande tra n ed m, e $n^{\star} = n$, forma un gruppo.

(b) Considera il monoide $(\mathbb{R}, +, 0)$. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = 2x + 1$ é un morfismo di monoidi da $(\mathbb{R}, +, 0)$ a $(\mathbb{R}, +, 0)$.

(c) $(2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}, +, 0)$, dove $2\mathbb{N}$ é l'insieme dei multipli di 2 in $\mathbb{N}$, $3\mathbb{N}$ é l'insieme dei multipli di 3 in $\mathbb{N}$, e $2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}$ é la loro unione, forma un monoide.

(d) $(2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}, +, 0)$, dove $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$ é l'intersezione di $2\mathbb{N}$ e $3\mathbb{N}$, forma un monoide.

(e) $(\mathbb{N}, \times, 0)$ forma un monoide.

(f) $(\mathbb{R}, +, 0, ^{-1})$, dove $\mathbb{R}$ é l'insieme dei numeri reali e r^{-1} é definito come $-r$, forma un gruppo abeliano.

(g) $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset, \cap)$, dove $\mathcal{P}(X)$ é l'insieme dei sottoinsiemi di un dato insieme X, é un semi-anello.

(a) No perché $max(n, n^{\star}) = max(n, n) = n$ é diverso da 0 per $n \neq 0$.

(b) No, ad esempio $f(2 + 3) = f(5) = 11 \neq 12 = 5 + 7 = f(2) + f(3)$.

(c) No, ad esempio $2 + 3 = 5$, che non é un multiplo né di 3 né di 2.

(d) Si

(e) No, 0 non é l'elemento neutro per $\times$.

(f) Si.

(g) Si.

A6 (3 punti). Considera il gruppo $\mathcal{M} = (\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \times, 1, ^{-1})$. Elementi di questo gruppo sono ad esempio

$$2^0 = 1 \qquad 2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad 2^1 = 2 \qquad 2^2 = 4.$$

L'operazione di inverso é definita da $(2^n)^{-1} := 2^{-n}$.

- Considera la funzione $f\colon \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(2^n) = n$. Quale struttura di gruppo su $\mathbb{Z}$ rende f un morfismo di gruppi? Ció che é richiesto é di definire $\circ$, u, $^{-1}$ su $\mathbb{Z}$ in modo tale che $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, \circ, u, ^{-1})$ sia un gruppo e $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{Z}$ sia un morfismo di gruppi. (Non é necessario dare una dimostrazione, solo la definizione della struttura di gruppo su $\mathbb{Z}$.)
- Definiamo $g\colon \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{N}$ come $g(2^n) = |n|$, dove $|n|$ é il valore assoluto di n (quindi ad esempio $|-5| = |5| = 5$). Indica se la seguente affermazione é vera o falsa. Se vera, dai una dimostrazione. Se falsa, dai un controesempio:
  - g é un morfismo di monoidi da $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \times, 1)$ a $(\mathbb{N}, +, 0)$.

- Definiamo $\circ := +$, $u := 0$, $n^{-1} := -n$.
  Infatti $f(1) = f(2^0) = 0$, $f(2^n \times 2^m) = f(2^{n+m}) = n + m = f(2^n) + f(2^m)$ e $f(2^n)^{-1} = n^{-1} = -n = f(2^{-n}) = f((2^n)^{-1})$.
- Falso, per esempio $g(2^2 \times 2^{-3}) = g(2^{2-3}) = g(2^{-1}) = |-1| = |1| \neq |2+3| = |2| + |3| = g(2^2 + 2^{-3})$.