

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_ Numero di CFU \_\_\_\_\_ Fila 1

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica  
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 25/05/2023**

*Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.*

- L1 (2 punti). (a) Dare la definizione di formula insoddisfacibile in logica classica proposizionale  
(b) Dare la definizione di funzione in teoria degli insiemi

- (a)  $F$  è insoddisfacibile quando in ogni mondo  $v$  si ha  $\|F\|^v = 0$   
(b) Una funzione di dominio  $A$  e codominio  $B$  è una relazione  $f \subseteq A \times B$  t.c. per ogni  $a \in A$  che esiste un unico  $b \in B$  t.c.  $afb$

- L2 (6 punti). Considerare la seguente grammatica per liste di numeri naturali:

$$\mathbb{L} ::= [] \mid \mathbb{N} :: L$$

dove il non terminale  $\mathbb{N}$  genera i numeri naturali.

Scrivere, per ricorsione strutturale, una funzione  $sums(L)$  che, data una lista di naturali  $L$ , ritorna la lista con ripetizioni di tutti i numeri  $N$  tali che  $N$  è la somma di un sottoinsieme di numeri contenuti in  $L$ . La lista in output deve contenere  $M$  copie di un numero  $N$  sse ci sono  $M$  sottoinsiemi di numeri contenuti in  $L$  la cui somma fa  $N$ . L'ordine della lista in output non è rilevante.

Esempio:  $sums(1 :: 2 :: 3 :: []) = 0 :: 1 :: 2 :: 3 :: 3 :: 4 :: 5 :: 6 :: []$ . Notate che 3 compare due volte in quanto è sia la somma dei numeri contenuti in  $\{3\}$ , che quella dei numeri contenuti in  $\{1, 2\}$ .

Attenzione:  $f$  **NON** potrà utilizzare parametri aggiuntivi, ma potrà richiamare altre funzioni definite da voi per ricorsione strutturale su liste, le quali a loro volta non potranno utilizzare parametri aggiuntivi.

Attenzione: mostrate il funzionamento della vostra soluzione sull'input di esempio qua sopra.

Suggerimento: la soluzione più breve richiede 4 righe di codice.

Soluzione al problema originale:  $sums(t)$

$$sums([]) = 0 :: []$$

$$sums(N :: L) = g(N, sums(L))$$

Problema 2: dato un numero  $N$  e una lista di numeri  $L$ , scrivere una funzione  $g$  che restituisca una lista contenente tutti i numeri in  $L$  e le loro somme con  $N$ . Esempio:

$$g(2, 1 :: 3 :: []) = 1 :: 3 :: 3 :: 5 :: []$$

Soluzione:

$$g([]) = []$$

$$g(N, M :: L) = M :: M + N :: g(N, L)$$

Esecuzione sull'input di prova:

$$sums(1 :: 2 :: 3 :: []) = g(1, sums(2 :: 3 :: [])) = \dots = g(1, g(2, g(3, 0 :: []))) = g(1, g(2, 0 :: 3 :: [])) = g(1, 0 :: 2 :: 3 :: 5 :: []) = 0 :: 1 :: 2 :: 3 :: 3 :: 4 :: 5 :: 6 :: []$$

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_ Numero di CFU \_\_\_\_\_ Fila 1

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica  
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 25/05/2023**

*Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.*

L3 (6 punti). Considerate la seguente codifica dei numeri naturali in teoria degli insiemi, definitiva per ricorsione strutturale su numeri naturali generati dall'usuale grammatica  $\mathbb{N} ::= O \mid SN$ .

$$\llbracket O \rrbracket = \emptyset$$

$$\llbracket SN \rrbracket = \llbracket N \rrbracket \cup \{\llbracket N \rrbracket\}$$

Dimostrare, per induzione strutturale, che  $\forall M. \emptyset \neq \llbracket M \rrbracket \Rightarrow \emptyset \in \llbracket M \rrbracket$ .

Elencare prima della dimostrazione tutti gli assiomi di teoria degli insiemi che vengono utilizzati. Preferire una prova intuizionista a una classica ove possibile.

Assioma dell'unione binaria:  $X \in A \cup B \iff X \in A \vee X \in B$

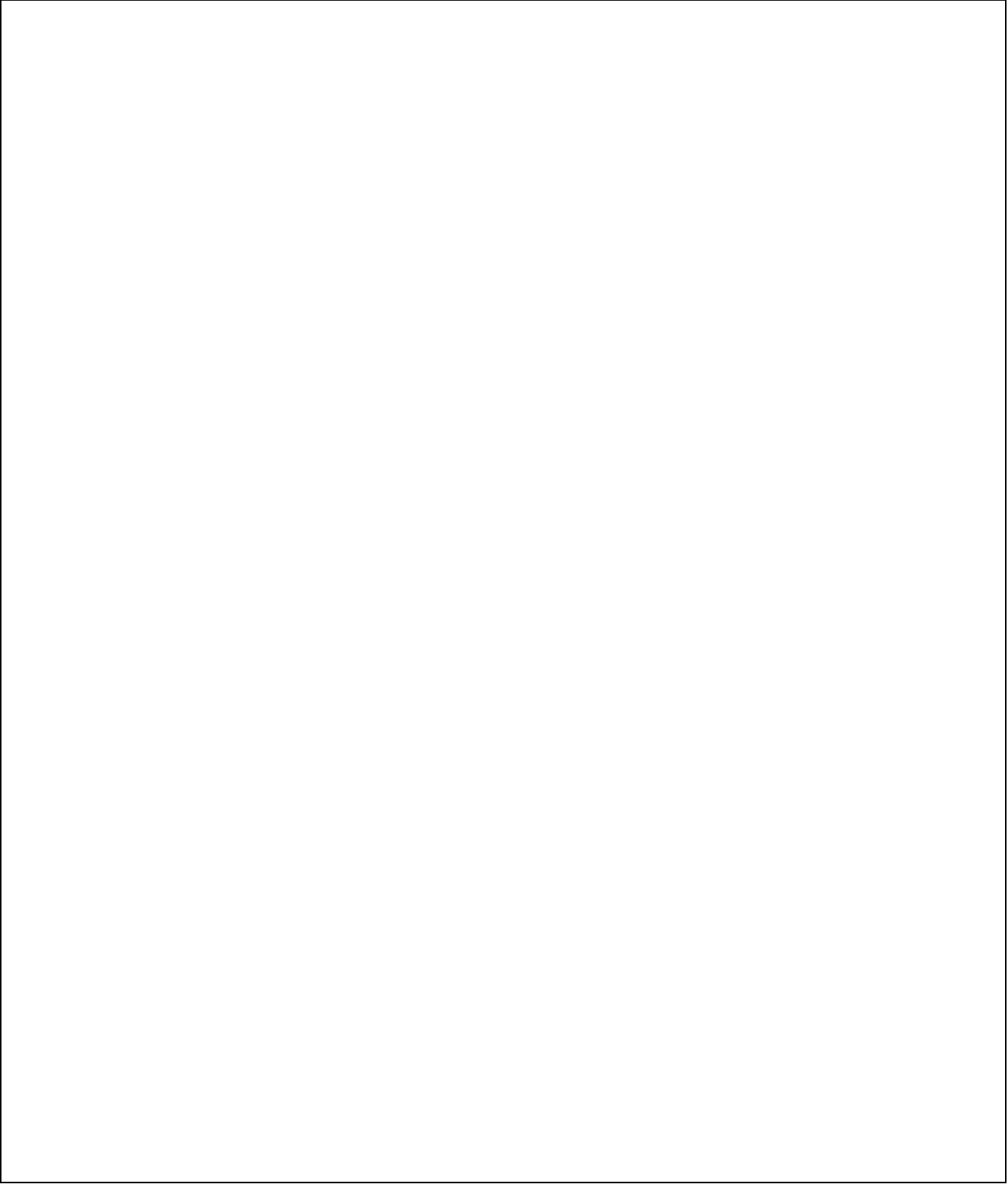
Assioma del singoletto:  $X \in \{A\} \iff X = A$

Lemma:  $\forall M. \emptyset \neq \llbracket M \rrbracket \Rightarrow \emptyset \in \llbracket M \rrbracket$ .

Dimostrazione: procediamo per induzione strutturale su  $M$  per dimostrare  $\emptyset \neq \llbracket M \rrbracket \Rightarrow \emptyset \in \llbracket M \rrbracket$ .

- Caso  $O$ : dimostriamo  $\emptyset \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \emptyset$ . Poichè la premessa è falsa la conclusione vale.
- Caso  $SX$ : per ipotesi induttiva si ha  $\emptyset \neq \llbracket X \rrbracket \Rightarrow \emptyset \in \llbracket X \rrbracket$  (II). Dobbiamo dimostrare  $\emptyset \neq \llbracket SX \rrbracket \Rightarrow \emptyset \in \llbracket SX \rrbracket$ , che è equivalente a  $\emptyset \neq \llbracket X \rrbracket \cup \{\llbracket X \rrbracket\} \Rightarrow \emptyset \in \llbracket X \rrbracket \cup \{\llbracket X \rrbracket\}$ . Supponiamo  $\emptyset \neq \llbracket X \rrbracket \cup \{\llbracket X \rrbracket\}$  (H). Per il principio del terzo escluso,  $\emptyset = \llbracket X \rrbracket \vee \emptyset \neq \llbracket X \rrbracket$ . Quindi procediamo per casi:
  - caso  $\emptyset = \llbracket X \rrbracket$ : quindi dobbiamo dimostrare  $\emptyset \in \emptyset \cup \{\emptyset\}$ . Per l'assioma dell'unione binaria mi riduco a dimostrare  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ , che vale per l'assioma del singoletto
  - caso  $\emptyset \neq \llbracket X \rrbracket$ : quindi, per II,  $\emptyset \in \llbracket X \rrbracket$ . Quindi, per l'assioma dell'unione binaria,  $\emptyset \in \llbracket X \rrbracket \cup \{\llbracket X \rrbracket\}$ .

Qed.



Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_ Numero di CFU \_\_\_\_\_ Fila 1

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica  
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 25/05/2023**

*Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.*

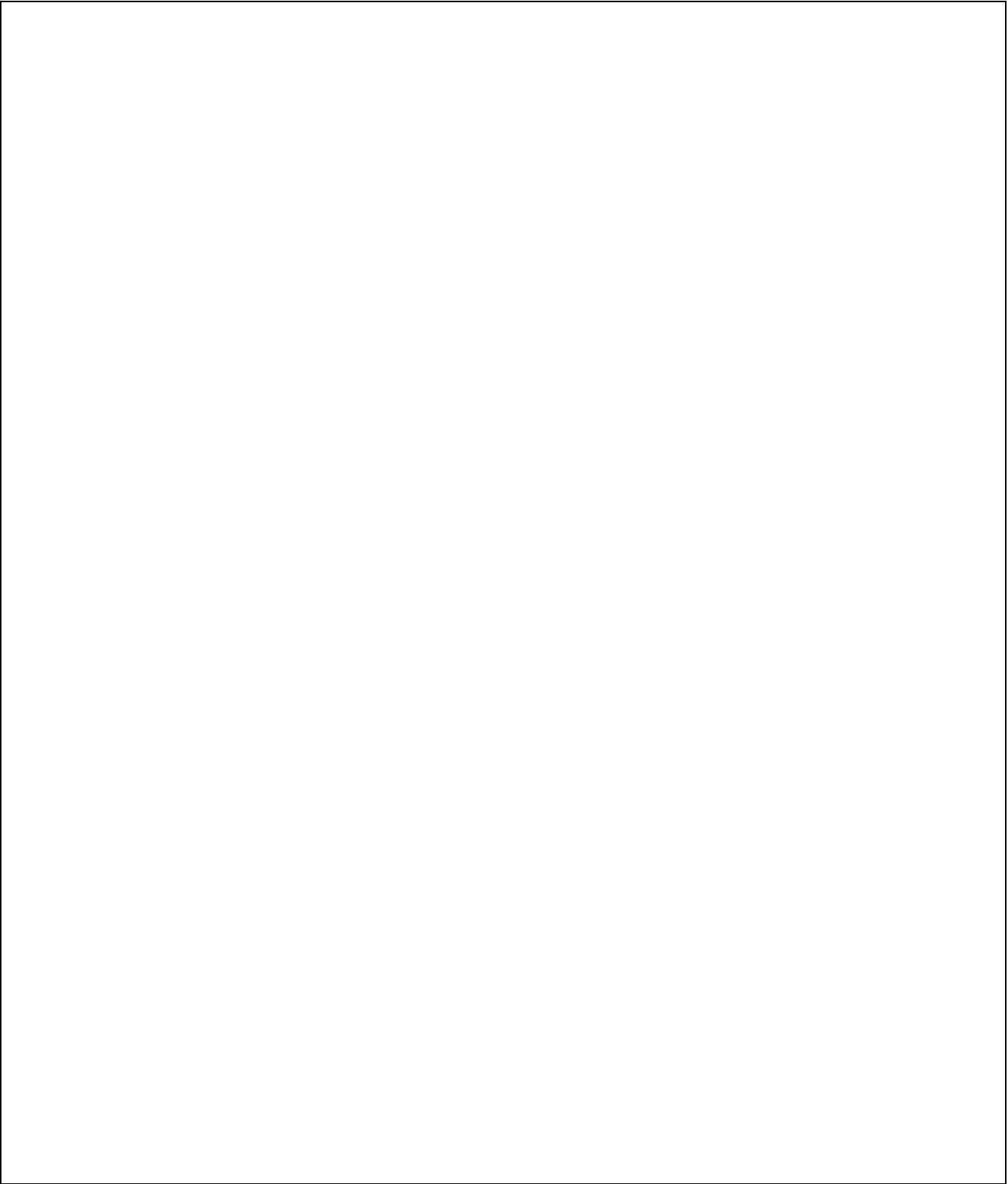
L4 (6 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Le risorse andranno spese bene o non otterremo nuovi finanziamenti. Le risorse andranno spese male o risolveremo il problema del dissesto idrogeologico. Se otterremo nuovi finanziamenti e le risorse andranno spese bene allora non sprecheremo i nuovi finanziamenti. Quindi se otterremo nuovi finanziamenti allora li sprecheremo oppure risolveremo il problema del dissesto idrogeologico.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

$A \vee \neg B, \neg A \vee C, B \wedge A \Rightarrow \neg E \vdash B \Rightarrow E \vee C$

$$\frac{\frac{\frac{A \vee \neg B}{\frac{\frac{[\neg A]}{\perp} \neg_e \quad \frac{[A]}{\perp} \neg_e}{\perp} \vee_e} \quad \frac{\frac{[\neg B]}{\perp} \neg_e \quad \frac{[B]}{\perp} \neg_e}{\perp} \vee_e}{\perp} \perp_e}{\neg A \vee C} \quad \frac{C}{E \vee C} \vee_{i2}}{B \Rightarrow E \vee C} \Rightarrow_i$$



Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_

Matricola \_\_\_\_\_ Numero di CFU \_\_\_\_\_ Fila 1

**Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica  
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 25/05/2023**

*Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.*

A5 (7 punti). Per ciascuno dei seguenti enunciati, indica se é vero o falso. Se falso, scrivi un controesempio.

- (a)  $(\{0, 1\}, +, 0, {}^{-1})$  dove  $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ ,  $0 + 0 = 0$ ,  $1 + 1 = 0$ ,  $0^{-1} = 1$  e  $1^{-1} = 0$ , forma un gruppo.
- (b) Dato l'insieme  $X = \{a, b\}$ , considera  $(\mathbb{L}(X), +, [])$ , dove  $\mathbb{L}(X)$  é l'insieme delle liste di elementi di  $X$ ,  $+$  indica l'operazione di concatenazione di due liste, e  $[]$  é la lista vuota.  $(\mathbb{L}(X), +, [])$  forma un monoide.
- (c)  $(2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}, 1, \times)$ , dove  $2\mathbb{N}$  é l'insieme dei multipli di 2 in  $\mathbb{N}$ ,  $3\mathbb{N}$  é l'insieme dei multipli di 3 in  $\mathbb{N}$ , e  $2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}$  é la loro unione, forma un monoide.
- (d)  $(2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}, 1, \times)$ , dove  $2\mathbb{N} \cap 3\mathbb{N}$  é l'intersezione di  $2\mathbb{N}$  e  $3\mathbb{N}$ , forma un monoide.
- (e)  $(\mathbb{N}, l)$ , dove  $l(n, m) = n$ , forma un semigrupp.
- (f)  $(\mathbb{R}, +, 1, {}^{-1})$ , dove  $\mathbb{R}$  é l'insieme dei numeri reali e  $r^{-1}$  é definito come  $\frac{1}{r}$ , forma un gruppo.
- (g)  $(\{0, 1\}, +, 0, \times, 1)$  dove

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 \quad 0 + 0 = 0 \quad 1 + 1 = 1$$

$$0 \times 1 = 1 \times 0 = 0 \quad 0 \times 0 = 0 \quad 1 \times 1 = 1$$

forma un semianello.

- (a) No, perché  $0 + 0^{-1} = 0 + 1 = 1 \neq 0$ .
- (b) Si
- (c) Si
- (d) Si
- (e) Si
- (f) No, perché in generale  $r + \frac{1}{r} \neq 1$ .
- (g) Si (il semianello booleano).

A6 (3 punti). Considera il monoide  $(\mathbb{X}, \circ, A)$ , dove  $\mathbb{X} = \{A, B, C\}$ , e le operazioni sono definite come segue.

$$\begin{array}{lll} A \circ A = A & A \circ B = B & A \circ C = C \\ B \circ A = B & B \circ B = C & B \circ C = A \\ C \circ A = C & C \circ B = A & C \circ C = B \end{array}$$

- (a) Definisci l'operazione unaria  $^{-1}$  in modo tale che  $(\mathbb{X}, \circ, A, ^{-1})$  formi un gruppo.
- (b) Il teorema di Cayley associa a questo gruppo un gruppo di permutazioni, chiamiamolo  $G$ . Dai una definizione di tutti gli elementi di  $G$ .
- (c) Qual é una permutazione su  $\mathbb{X}$  che *non* appartiene a  $G$ ?

(a)

$$A^{-1} = A \quad B^{-1} = C \quad C^{-1} = B$$

(b) Il teorema di Cayley associa a questo gruppo il gruppo  $(\{\pi_A, \pi_B, \pi_C\}, \circ, \pi_A, ^{-1})$ . Gli elementi sono le permutazioni

$$\begin{array}{lll} \pi_A: A \mapsto A & B \mapsto B & C \mapsto C \\ \pi_B: A \mapsto B & B \mapsto C & C \mapsto A \\ \pi_C: A \mapsto C & B \mapsto A & C \mapsto A \end{array}$$

(c) Una permutazione che non appartiene a questo gruppo é ad esempio

$$\pi: A \mapsto A \quad B \mapsto C \quad C \mapsto B$$