Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/02/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L1 (2 punti).
(a) Definire la relazione $v \Vdash F$ dove F è una formula della logica classica proposizionale e v un'interpretazione (o mondo)
(b) Dare un esempio di equivalenza logica notevole che vale classicamente, ma non intuizionisticamente

(a) $v \Vdash F$ (v soddisfa F) sse $[\![F]\!]^v = 1$
(b) $\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$

L2 (6 punti). Considerare le seguenti grammatiche:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{L} & ::= & [] \mid \mathbb{N} :: L \\ T & ::= & \emptyset \mid \langle \mathbb{N}, T \rangle \mid \langle T, \mathbb{N}, T \rangle \\ C & ::= & \emptyset \mid \langle C, \mathbb{L}, C \rangle \end{array}$$

Il non terminale $\mathbb{L}$ genera liste di numeri naturali.

Gli alberi generati dal non terminale T sono o vuoti ($\emptyset$) oppure nodi contenente un naturale e un solo sottoalbero ($\langle \mathbb{N}, T \rangle$) oppure nodi contente un naturale e due sottoalberi.

Gli alberi generati dal non terminale C sono o vuoti ($\emptyset$) oppure nodi contente una lista di naturali $\mathbb{L}$ e due sottoalberi.

Si ottiene una lista di naturali leggendo in sequenza i naturali di un cammino radice-foglia di un albero generato da T, oppure concatenando le liste di naturali incontrate in un cammino radice-foglia di un albero generato da C.

Risolvere, tramite ricorsione strutturale, il seguente problema. È possibile introdurre funzioni ausiliarie e/o usare parametri aggiuntivi. Nel caso di funzioni ausiliarie, dare la specifica dettagliata della funzione. Nel caso di parametri ausiliari, indicare il valore iniziale.

Problema: dato un albero t generato dal non-terminale T, restituire un albero c generato dal non-terminale C e equivalente a t, ovvero tale che ogni cammino radice-foglia di t abbia un corrispondente cammino radice-foglia in c, dove corrispondente significa che le due liste di naturali ottenute dal cammino sono le stesse.

Esempio: $t = \langle\langle 5, \langle 6, \emptyset\rangle\rangle, 3, \langle 2, \langle\emptyset, 4, \emptyset\rangle\rangle\rangle$ ha come insieme di cammini $\{3 : 5 : 6 : [], 3 : 2 : 4 : []\}$. L'albero equivalente da restituire è $c = \langle\langle\emptyset, 5 : 6 : [], \emptyset\rangle, 3 : [], \langle\emptyset, 2 : 4 : [], \emptyset\rangle\rangle$ che ha lo stesso insieme di cammini.

Soluzione al problema originale: $f(t)$

$f(\emptyset) = \emptyset$
$f(\langle t_1, n, t_2, \rangle = \langle f(t_1), n, f(t_2)\rangle$
$f(\langle n, t\rangle) = add(n, f(t))$

Problema 2: dato un numero n e un albero c generato dal non terminale C, produce un nuovo albero generato dal non terminale C che ha come cammini gli stessi di c, ma con il naturale n in testa.
Soluzione: $add(n, t)$

$add(n, \emptyset) = \langle\emptyset, n : [], \emptyset\rangle$
$add(n, \langle c_1, l, c_2\rangle) = \langle c_1, n :: l, c_2\rangle$

Cognome ______________________ Nome ______________________

Matricola ______________________ Numero di CFU ________ Fila 1

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/02/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L3 (6 punti). Definiamo la differenza simmetrica di due insiemi come segue:
$A\Delta B := \{x \in A \mid x \notin B\} \cup \{x \in B \mid x \notin A\}$

Dimostrare che $\forall A, B, A \subseteq A\Delta B \cup A \cap B$.
Ogni passo della dimostrazione deve corrispondere a uno o più passi di deduzione naturale al prim'ordine. Preferire una prova intuizionista a una classica se possibile.

Esplicitare prima della dimostrazione l'enunciato degli assiomi di teoria degli insiemi che utilizzate poi nel testo.

Assioma di separazione: $X \in \{Y \in A \mid P(Y)\} \iff X \in A \wedge P(X)$
Assioma dell'unione binaria: $X \in A \cup B \iff X \in A \vee X \in B$
Assioma dell'intersezione binaria: $X \in A \cap B \iff X \in A \wedge X \in B$

Teorema: $\forall A, B, A \subseteq A\Delta B \cup A \cap B$
Dimostrazione: siano A, B insiemi. Dobbiamo dimostrare $A \subseteq A\Delta B \cup A \cap B$ o equivalentemente $\forall X, (X \in A \Rightarrow X \in A\Delta B \cup A \cap B)$. Sia X un insieme t.c. $X \in A$ (H). Per il principio del terzo escluso, $X \in B \vee X \notin B$. Quindi procediamo per casi:

- Caso $X \in B$. Quindi, per H, $X \in A \wedge X \in B$ e quindi, per l'assioma dell'intersezione binaria, $X \in A \cap B$ e quindi, per l'assioma dell'unione binaria, $X \in A\Delta B \cup A \cap B$.
- Caso $X \notin B$. Quindi, per H, $X \in A \wedge X \notin B$ e quindi, per l'assioma di separazione, $X \in \{Y \in A \mid Y \notin B\}$ e quindi, per l'assioma dell'unione binaria, $X \in A\Delta B$ e quindi, per l'assioma dell'unione binaria, $X \in A\Delta B \cup A \cap B$.

Qed.

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/02/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

L4 (6 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se non vincerà Lazza, allora gli ascoltatori si saranno addormentati o il televoto sarà stato pilotato. Lazza vincerà se gli ascoltatori si saranno addormentati. La giuria non sarà composta solo da boomer o il televoto sarà pilotato. Se il televoto sarà pilotato o la giuria sarà composta da boomer, allora Mengoni vincerà. Quindi vinceranno Lazza o Mengoni.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

$\neg A \Rightarrow B \lor C, \quad B \Rightarrow A, \quad \neg E \lor C, \quad C \lor E \Rightarrow D \vdash A \lor D$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots$}
\RightLabel{EM}
\UnaryInfC{$A \lor \neg A$}
\AxiomC{$[A]$}
\RightLabel{$\lor_{i1}$}
\UnaryInfC{$A \lor D$}
\AxiomC{$C \lor E \Rightarrow D$}
\AxiomC{$\neg A \Rightarrow B \lor C$}
\AxiomC{$[\neg A]$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$B \lor C$}
\AxiomC{$[\neg A]$}
\AxiomC{$B \Rightarrow A$}
\AxiomC{$[B]$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\bot_e$}
\UnaryInfC{C}
\AxiomC{$[C]$}
\RightLabel{$\lor_e$}
\TrinaryInfC{C}
\RightLabel{$\lor_{i1}$}
\UnaryInfC{$C \lor E$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{D}
\RightLabel{$\lor_{i2}$}
\UnaryInfC{$A \lor D$}
\RightLabel{$\lor_e$}
\TrinaryInfC{$A \lor D$}
\end{prooftree}
$$

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Numero di CFU** ________ **Fila 1**

Università degli Studi di Bologna, Corso di Laurea in Informatica
Esame di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU), 16/02/2023

Utilizzare i riquadri bianchi per le risposte. Se strettamente necessario, si può allegare un foglio protocollo in coda con ulteriore testo, indicando in alto nome, cognome, fila e matricola.

A5 (3 punti). Considera il monoide $(\mathbb{R}, +, 0)$, dove $\mathbb{R}$ é l'insieme dei reali. Dati due valori arbitrari $m, b \in \mathbb{R}$, possiamo definire la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come $f(x) = mx + b$. Per quali valori di m e di b la funzione f é anche un morfismo di monoidi tra $(\mathbb{R}, +, 0)$ e $(\mathbb{R}, +, 0)$? Motiva la tua risposta.

Per $b = 0$ é sempre un morfismo di monoidi perchè $f(x + y) = m(x + y) = mx + my = f(x) + f(y)$ e $f(0) = m0 = 0$. Per $b \neq 0$, non é un morfismo di monoidi perché $f(x + y) = m(x + y) + b = mx + my + b \neq mx + my + 2b = mx + b + my + b = f(x) + f(y)$.

A6 (3 punti). Per ciascuno dei seguenti enunciati, indica se é vero o falso. Se falso, scrivi un controesempio.

(a) $(\mathbb{N}, \times, 1)$ forma un monoide.

(b) Dato l'insieme $X = \{a, b\}$, considera $(\mathbb{L}(X), +, [\,])$, dove $\mathbb{L}(X)$ é l'insieme delle liste di elementi di X, $+$ indica l'operazione di concatenazione di due liste, e $[\,]$ é la lista vuota. $(\mathbb{L}(X), +, [\,])$ forma un monoide commutativo (detto anche monoide abeliano).

(c) $(\mathbb{N}, z, 0, ^\star)$, dove $z(n, m) = 0$ e $n^\star = n$, forma un gruppo.

(d) $(\mathbb{N}, max, 0, ^\star)$, dove $max(n, m)$ é il numero piú grande tra n ed m, e $n^\star = n$, forma un gruppo.

(a) Si, (b) No (non é commutativo), (c) No, perché $z(n, 0) = 0 = z(0, n)$ quindi 0 non é l'elemento neutro per z, (d) No perché $max(n, n^\star) = max(n, n) = n$ é diverso da 0 per $n \neq 0$.

A7 (4 punti). Considera i seguenti monoidi:

- $(\mathcal{L}, +, [\,])$, dove $\mathcal{L}$ é l'insieme delle liste di numeri naturali, $+$ indica l'operazione di concatenazione di due liste, e $[\,]$ é la lista vuota.
- $(\mathcal{P}, \cup, \emptyset)$, dove $\mathcal{P}$ é l'insieme degli insiemi di numeri naturali, $\cup$ indica l'operazione di unione di insiemi, e $\emptyset$ é l'insieme vuoto.

Considera il morfismo di monoidi $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{P}$ definito come $f(l) = \{x \mid x \text{ é un elemento della lista } l\}$. Rispondi alle seguenti domande:

(a) Considera l'insieme quoziente $\mathcal{L}_{/\sim_f}$ dato da f su $\mathcal{L}$. Come sono definiti i suoi elementi?

(b) Il teorema fondamentale dei morfismi stabilisce che $\mathcal{L}_{/\sim_f}$ é un monoide. Definisci la sua struttura di monoide.

(c) Qual é la relazione tra $\mathcal{P}$ e $Imm(f)$, l'immagine di f?

(d) Il teorema fondamentale dei morfismi stabilisce che $\mathcal{L}_{/\sim_f}$ é isomorfo a $Imm(f)$. Definisci un isomorfismo di monoidi tra $\mathcal{L}_{/\sim_f}$ e $Imm(f)$.

(a) Gli elementi di $\mathcal{L}_{/\sim_f}$ sono classi di equivalenza definite come segue:

$$[l] = \{l' \mid l \text{ e } l' \text{ hanno gli stessi elementi }\}$$

Perció due liste fanno parte della stessa classe quando hanno gli stessi elementi. Ad esempio $[2, 3] = [3, 2, 3]$.

(b) $[l] \circ [l'] := [l + l']$ e l'elemento neutro é la classe d'equivalenza della lista vuota.

(c) Sono lo stesso insieme (f é suriettiva).

(d) L'isomorfismo mappa $[l]$ nell'insieme degli elementi di l.