Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esame scritto di LOGICA PER L'INFORMATICA (9 CFU)
18/01/2023

Scrivere **nome, cognome, numero di CFU e numero di matricola in alto a destra** in tutti i fogli protocollo.
Usare **fogli protocolli disgiunti** per la parte di logica (es. L1-L4) e quella di algebra (es. A5-A7).

L1 (2 punti).
(a) Dare la definizione di relazione di equivalenza.
(b) Quando la relazione vuota ($\emptyset$) è una relazione di equivalenza su un insieme A?

(a) Una relazione è di equivalenza se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
(b) Lo è sse $A = \emptyset$. In caso contrario non vale infatti la proprietà riflessiva

L2 (6 punti). Considerare le seguenti grammatiche per liste di numeri interi, dove ":" è associativo a destra e il non-terminale $\mathbb{Z}$ genera tutti i numeri interi:

$$L \quad ::= \quad [] \mid \mathbb{Z} : L$$

Data una lista L di numeri, **scrivere** per ricorsione strutturale su L e **testare** sull'esempio qui sotto una funzione $f(L)$ che restituisca la somma di tutti gli elementi del suffisso di L (ovvero di una sequenza di numeri consecutivi di L ottenuta eliminando i primi numeri) che abbia somma massima.

Esempio: $f(4 : -2 : -3 : 6 : -4 : -1 : 3 : 0 : 3 : -7 : []) = 0$ in quanto la sottolista $6 : -4 : -1 : 3 : 0 : 3 : -7 : []$ ha somma 0 e tutti gli altri suffissi (es. $3 : 0 : 3 : -7 : []$) hanno somme inferiori.

È possibile utilizzare funzioni ausiliare definite per ricorsione strutturale, ma non passare parametri ausiliari. **Dettagliare la specifica di tutte le funzioni ausiliarie introdotta.**
Si consiglia di testare ogni funzione ausiliaria su un input di esempio, al fine di mostrare qualche passaggio dell'esecuzione.

Problema 1: data L, calcolare la somma del suffisso di somma massima
Soluzione: $f(L)$
Esempio: $f(4 : -2 : -3 : 6 : -4 : -1 : 3 : 0 : 3 : -7 : []) = 0$

```
f([]) = 0
f(z:L) = max(sum(z:L), f(L))

f(4:-2:-3:6:-4:-1:3:0:3:-7:[]) =
max(sum(4:-2:-3:6:-4:-1:3:0:3:-7:[]), f(-2:-3:6:-4:-1:3:0:3:-7:[]))
=
max(-1, max(sum(-2:-3:6:-4:-1:3:0:3:-7:[]), f(-3:6:-4:-1:3:0:3:-7:[])))=
...=
max(-1,max(-5, max(-3, max(0, max(-6, max(-2, max(-1, max(-4,
max(-4, max(-7,0))))))))))=
0
```

Problema 2: data L, calcolare la somma dei suoi elementi
Soluzione: $sum(L)$
Esempio: $sum(-2 : 3 : 6 : []) = 7$

```
sum([]) = 0
sum(z:L) = z + sum(L)

sum(-2:3:6:[]) =
-2 + sum(3:6:[]) =
-2 + 3 + sum(6:[]) =
-2 + 3 + 6 + sum([]) =
-2 + 3 + 6 + 0 =
7
```

L3 (6 punti). Il seguente predicato $NonPos(L)$, definito per ricorsione strutturale su L, afferma che L contiene solo numeri non negativi:

$$\begin{array}{rcl} NonPos([]) & = & \top \\ NonPos(z : L) & = & z \leq 0 \wedge NonNeg(L) \end{array}$$

Per esempio, $NonPos(2 : -1 : []) = 2 \leq 0 \wedge -1 \leq 0 \wedge \top$ ed è falso nell'usuale interpretazione aritmetica.

Sia sum la funzione che, data una lista di numeri interi, ne calcoli la loro somma.

Dimostrate, per induzione strutturale su L:

$$\forall L.NonPos(L) \Rightarrow sum(L) \leq 0$$

Teorema: $\forall L.NonPos(L) \Rightarrow sum(L) \leq 0$
Dimostrazione: procediamo per induzione strutturale su L per dimostrare $NonPos(L) \Rightarrow sum(L) \leq 0$

(a) Caso $[]$. Devo dimostrare $NonPos([]) \Rightarrow sum([]) \leq 0$, ovvero $\top \Rightarrow 0 \leq 0$. Ovvio per la proprietà riflessiva del $\leq$

(b) Caso $z : L$. Per ipotesi induttiva $NonPos(L) \Rightarrow sum(L) \leq 0$ (II)
Devo dimostrare $NonPos(z : L) \Rightarrow sum(z : L) \leq 0$, ovvero $z \leq 0 \wedge NonPos(L) \Rightarrow z + sum(L) \leq 0$. Assumo $z \leq 0$ (H1) e $NonPos(L)$ (H2). Per II e H2 si ha $sum(L) \leq 0$. Quindi, per H1 e la proprietà che dice che la somma di numeri non positivi è non positiva, $z + sum(L) \leq 0$

Qed.

L4 (6 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se la Russia avanzerà sul campo allora l'Ucraina si arrenderà o la guerra non finirà. Non è vero che: la Russia non avanzerà sul campo e il supporto americano verrà meno. La guerra finirà se il supporto americano verrà meno. Quindi se il supporto americano verrà meno allora l'Ucraina si arrenderà.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

$A \Rightarrow B \vee \neg C, \neg(\neg A \wedge D), D \Rightarrow C \vdash D \Rightarrow B$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg(\neg A \wedge D)$}
\AxiomC{$A \Rightarrow B \vee \neg C$}
\AxiomC{$[A]$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$B \vee \neg C$}
\AxiomC{$[\neg B]$}
\AxiomC{$[B]$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$[\neg C]$}
\AxiomC{$D \Rightarrow C$}
\AxiomC{$[D]$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{C}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$\neg_i$}
\UnaryInfC{$\neg A$}
\AxiomC{$[D]$}
\BinaryInfC{$\neg A \wedge D$}
\RightLabel{$\neg_e$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{RAA}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$D \Rightarrow B$}
\end{prooftree}
$$

A5 (2 punti). Considera il magma $(\mathbb{N}, +)$, dove $\mathbb{N}$ é l'insieme dei numeri naturali, ed il magma $(\mathbb{P}, \times)$, dove $\mathbb{P}$ é l'insieme dei numeri pari, e la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ definita come $f(n) = 2n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La funzione f é anche un morfismo di magmi? Motiva la tua risposta.

No perché ad esempio $f(2+3) = 10$ ma $f(2) = 4$, $f(3) = 6$ e $4x6 = 24$, quindi $f(2) \times f(3) \neq f(2+3)$. Quindi la funzione non preserva l'operazione di magma.

A6 (3 punti). Per ciascuno dei seguenti enunciati, indica se é vero o falso (senza dimostrazione!).

(a) $(\mathbb{L}, +)$, dove $\mathbb{L}$ é l'insieme delle liste di numeri naturali e $+$ indica l'operazione di concatenazione di due liste, forma un semigruppo.

(b) $(\mathbb{N}, l)$, dove $l(n, m) = n$, forma un semigruppo.

(c) $(\mathbb{N}, \times, 0)$ forma un monoide.

(d) $(\mathbb{N}, \div, 1)$, dove $\div$ é la divisione, forma un monoide.

(e) $(\mathbb{Z}_2, +, 0)$, dove $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, e l'operazione $+$ é l'addizione modulo 2 sugli interi, forma un monoide commutativo (detto anche monoide abeliano).

(f) $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset, (X \setminus \cdot), \cap)$, dove $\mathcal{P}(X)$ é l'insieme dei sottoinsiemi di X e $(X \setminus \cdot) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ é l'operazione unaria definita come $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$, é un anello.

- Si
- Si
- No (0 non é l'elemento neutro)
- No (i naturali non sono chiusi rispetto alla divisione)
- Si
- No ($X \setminus \cdot$ non è l'operazione inversa dell'unione)

A7 (5 punti). Considera il gruppo $(\mathbb{Z}_4, +, 0, ^{-1})$, dove $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, e l'operazione $+$ é l'addizione modulo 4 sugli interi.

- Il teorema di Cayley associa a questo gruppo un gruppo di permutazioni, chiamiamolo G. Dai una definizione di tutti gli elementi di G.

- Qual é una permutazione su $\mathbb{Z}_4$ che *non* appartiene a G?

Il teorema di Cayley associa a questo gruppo il gruppo $(\{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \circ, \pi_0, ^{-1})$. Gli elementi sono le permutazioni

$$
\begin{array}{llll}
\pi_0\colon 0 \mapsto 0 & 1 \mapsto 1 & 2 \mapsto 2 & 3 \mapsto 3 \\
\pi_1\colon 0 \mapsto 1 & 1 \mapsto 2 & 2 \mapsto 3 & 3 \mapsto 0 \\
\pi_2\colon 0 \mapsto 2 & 1 \mapsto 3 & 2 \mapsto 0 & 3 \mapsto 1 \\
\pi_3\colon 0 \mapsto 3 & 1 \mapsto 0 & 2 \mapsto 1 & 3 \mapsto 2
\end{array}
$$

Una permutazione che non appartiene a questo gruppo é ad esempio

$$
\pi_0\colon 0 \mapsto 0 \quad 1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto 3 \quad 3 \mapsto 2
$$