Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esame scritto di LOGICA PER L'INFORMATICA
Modulo di Algebra (3 CFU) per chi ha già sostenuto il Modulo di Logica
13/09/2022

Scrivere **nome, cognome, numero di CFU e numero di matricola in alto a destra** in tutti i fogli protocollo.

1 (10 punti). Si consideri il seguente frammento di codice, dove `max` e `current` sono di tipo "numero naturale" e `l` è una lista di numeri naturali.

```
fill max l = fill' max 0 l

fill' max current [] = current
fill' max current (x::l) =
 IF current + x > max THEN
   fill' max current l
 ELSE
   fill' max (current+x) l
```

(a) Cosa restituisce `fill 10 [2,3,2,4,6,2]`?

(b) Cosa calcola la funzione `fill`?

(c) Il datore di lavoro preferisce una seconda versione più informativa che si comporti come la `fill`, ma che restituisca la lista dei numeri che vengono sommati per ottenere l'output della `fill` invece della mera somma. Invece di implementare una seconda funzione, generalizzate le funzioni `fill` e `fill'` rendendole funzioni di ordine superiore che accettano ulteriori funzioni come parametri.

Ottenete la `fill` originale e la `fill` modificata come vuole il datore di lavoro come istanze della `fill` generale.

(d) La `fill` generale che avete scritto permette come istanza di restituire solamente il numero di addendi invece della loro somma o della loro lista? Se sì, mostrate l'istanza che lo fa. Se no, ottenete il codice voluto chiamando l'istanza che calcola la lista di addendi e poi modificandone l'output.

3 (10 punti). Chiamiamo **premod** una struttura algebrica $(B, A, *, +, 0)$ t.c.

(a) $+ \in A^{A\times A}$, $0 \in A$, $* \in A^{B\times A}$

(b) $b * 0 = 0$ per ogni $b \in B$

(c) $b * (a_1 + a_2) = b * a_1 + b * a_2$ per ogni $b \in B$, $a_1, a_2 \in A$

(d) $a + 0 = 0 + a = a$ per ogni $a \in A$

(e) $(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$ per ogni $a_1, a_2, a_3 \in A$

Rispondere alle seguenti domande fornendo risposte ben giustificate (es. con da una dimostrazione o da un controesempio), assumendo che $(B, A, *, +, 0)$ si aun premod:

(1) Che tipo di struttura algebrica è $(A, +, 0)$? È abeliana?

(2) Siano $B' \subseteq B$ e $A' \subseteq A$. $(B', A, *, +, 0)$ è un premod? E $(B, A', *, +, 0)$ lo è?

(3) Quale delle seguenti strutture sono premod?

i. $(\mathbb{N}, \mathbb{L}, *, @, [])$ dove $\mathbb{L}$ sono liste di numeri naturali, $@$ è la concatenazione di liste, $[]$ la lista vuota e $n * L = L@\ldots@L$ dove la concatenazione avviene n volte

ii. $(\mathbb{N}, \mathbb{L}, \circ, @, [])$ dove $n \circ [m_1, \ldots, m_k] = [n \circ m_1, \ldots, n \circ m_k]$

iii. $(\mathbb{N}, \mathbb{L}, \circ, \ddagger, [])$ dove $n \ddagger L$ è la lista ottenuta da L cancellando tutte le occorrenze di n

(4) Per un $b \in B$ sia bA definito come $\{b * a \mid a \in A\}$. bA è una sottostruttura di $(A, +, 0)$?

(5) Sia $(A, +, 0)$ un monoide. Un monoide si dice **idempotente** quando per ogni $a \in A$ si ha $a * a = a$. $(A, A, +, +, 0)$ è un premod? Lo è quando $(A, +, 0)$ è idempotente? E quando è idempotente e abeliano?

2 (10 punti). Considerare lo spazio di funzioni reali $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, -, 0)$ dove $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (somma di funzioni), $(-f)(x) = -f(x)$ (funzione opposta) e $0(x) = 0$ (la funzione costante 0).

Rispondere alle seguenti domande fornendo dimostrazioni o controesempi ove opportuno:

Lo spazio di funzioni reali è un gruppo? È abeliano?

ii. Considerare la seguente relazione su $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:
$f \equiv g$ sse $\forall x \in [-1, 1]. f(x) = g(x)$.
   A. Dimostrare che la relazione è di equivalenza
   B. Dimostrare che la relazione è compatibile con le operazioni del gruppo, ovvero che le operazioni $+$ e $-$ del gruppo mappano coppie di elementi equivalenti in elementi equivalenti
   C. Dotare il quoziente $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})_{/\equiv}$ della struttura di gruppo corrispondente

iii. Considerare la funzione F di dominio e codominio $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definita come segue: $(F(f))(x) = 0$ se $x \notin [-1, 1]$, $(F(f))(x) = f(x)$ altrimenti.
   A. Dimostrare che F è un morfismo di gruppi
   B. Calcolare l'immagine e il kernel di F
   C. Esplicitare la classe di equivalenza di $f(x) = x^2$

iv. Dimostrare che $\equiv$ e $\equiv_F$ sono la stessa relazione di equivalenza