LOGICA PER L'INFORMATICA (6cfu)
16/02/2022

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Esercizio 1 (1 punto):
Scrivere la sintassi della logica del prim'ordine.

Esercizio 2 (5 punti):
Considerare liste di numeri generate dalla grammatica L ::= [] | ℕ : L dove ℕ genera tutti i numeri naturali.

1) Scrivere una funzione d che, data una lista di numeri, restituisce il massimo n t.c. la lista contiene una occorrenza di un numero diversa da n altre occorrenze di numeri nella lista.

Esempio: d (2:2:4:3:[]) = 3 in quanto 3 è diverso dal primo 2, dal secondo 2 e dal 4, e non ci sono altre occorrenze diverse da più di 3 occorrenze.

Esempio: d (2:3:2:3:[]) = 2.

2) Mostrare l'esecuzione della funzione sull'input 2:4:3:2:[].

Esercizio 3 (5 punti):
Dimostrare il seguente enunciato di teoria assiomatica degli insiemi. Specificare l'enunciato di tutti gli assiomi utilizzati.

Utilizzare passaggi che corrispondano a uno o più passi di una prova per deduzione naturale. Preferire una prova intuizionista a una classica se possibile.

$A \times B \subseteq A' \times B \Rightarrow B = \emptyset \lor A \subseteq A'$

Esercizio 4 (1 punto):
Enunciare il teorema di deduzione semantica per la logica proposizionale classica.

Esercizio 5 (1 punto):
Completare le seguenti equivalenze logiche notevoli della logica del prim'ordine:

$\exists x.(P(x) \lor Q(x)) \equiv \ldots$
$(\exists x.P(x)) \Rightarrow Q(x) \equiv \ldots$

Esercizio 6 (1 punto):
Dare la definizione di relazione di equivalenza.

Esercizio 7 (5 punti):
Considerare la seguente sintassi per liste di numeri naturali L ::= [] | ℕ : L , la sintassi C ::= <ℕ, ℕ> per coppie di naturali e le seguenti funzioni definite per ricorsione strutturale:

comb [] l = l
comb (x:l1) l2 = <x, hd l2> : comb l1 (tl l2)
hd [] = 0
hd (x:l) = x
tl [] = []
tl (x:l) = l
red [] = tt
red (c:l) = test c && red l
test < x, y > = x ==y

dove tt è il booleano true, && la congiunzione di booleani, e == la funzione che confronta due numeri tornano tt sse sono uguali.

Dimostrare, per induzione strutturale, il seguente enunciato:
∀l. red (comb l l) = tt

Esercizio 8 (6 punti):
San Valentino, poliamoroso.

Formalizzare il seguente ragionamento e dimostrarlo in deduzione naturale proposizionale, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile.

Luca ama Anna e Bruno, ma non Carmela. Almeno una di queste due è vera: 1) se Luca ama Anna allora deve amare anche Carmela, 2) se Luca ama Bruno o Carmela allora Carmela non è amata da Bruno o Anna da Luca. Sono invece entrambe vere le seguenti: 1) Bruno ama Luca se Anna ama Carmela; 2) se Bruno non ama Luca allora quest'ultimo non ama Carmela.

Quindi, ovviamente, Anna ama Carmela se anche Bruno la ama; inoltre Luca ama Bruno se Anna ama Carmela.

Esercizio 9 (2 punto):
Considerare il seguente programma scritto in C(++):

```
int f(int x, int y) {
   int w = x+y;
   return x*z - y*w;
}
int main() {
  int z = 1;
  int x = 2;
  return f(x+z, y+w);
}
```

Effettuare l'inlining del corpo della funzione f nel corpo della main, minimizzando il numero di cambi di nome per le variabili legate.
Nota: effettuare l'inlining vuol dire sostituire l'intero corpo della funzione f (dichiarazione di variabile locale inclusa) all'interno del corpo della main, ovviamente dopo aver sostituito i parametri attuali della chiamata a quelli formali.
Esempio: l'inling di int g(int x) { int w = x+2; return w+w; } in { ... return g(3)*2; } è { ... int w = 3+2; return (w+w)*2; }

Esercizio 10 (3 punti):
Dimostrare, in deduzione naturale al prim'ordine, il seguente teorema, preferendo una prova intuizionista a una classica se possibile:

$\forall x.\exists y.x+y>2*x \vdash \exists x.x>2*3!$