LOGICA PER L'INFORMATICA (3cfu)
16/02/2022

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Esercizio 1 (10 punti):

L'insieme dei numeri complessi ℂ comprende tutti i numeri della forma x + y*i dove x e y sono numeri reali e i è una nuova costante diversa da qualunque numero reale e con la proprietà i * i = -1. Somma e prodotto di numeri complessi sono definiti come ci si aspetta, es. (2 + 3*i) * (1 + 2*i) = 2 + 7*i + 6*i*i = 2 + 7*i + -6 = -4 + 7*i.

1) L'insieme ℂ con l'operazione di addizione forma un semigruppo? un monoide? un gruppo? se sì dimostrarlo

2) Il prodotto scalare di due numeri complessi è definito come segue: (x1 + y1*i) ** (x2 + y2*i) = x1*x2 + y1*y2.

Dato un numero complesso qualsiasi (x1 + y1*i), definiamo Ort(x1 + y1*i) = { x2 + y2*i | (x1 + y1*i) ** (x2 + y2*i) = 0 }.
Dimostrare che Ort(x1 + y1*i) è una sotto-struttura algebrica della struttura algebrica individuata al punto 1.

3) Definiamo la relazione ~ sui numeri complessi come segue: x1 + y1*i ~ x2 + y2*i sse Ort(x1+y1*i) = Ort(x2+y2*i).
Dimostrare che ~ è una relazione di equivalenza, esplicitare ℂ/~ e calcolarne la cardinalità.

Esercizio 2 (10 punti):
Sia A l'insieme di tutte le coppie < n, d > dove n è un numero intero positivo e d il massimo numero primo che divide m, o 1 se n=1.

Esempio: <12, 3> ∈ A mentre <12, 2> ∉ A.

Definiamo l'operazione ** su coppie di numeri come segue: <n1, d1> ** <n2, d2> = <n1 * n2, max{d1,d2} >.

Rispondere alle seguenti domane motivando le risposte ove necessario:

1) L'insieme A è chiuso per **?

2) ** ha un elemento neutro? Se sì indicarlo nel seguito come 11. Qual'è?

3) Esiste un'operazione unaria ' t.c. <n,d> ** <n,d>' = <n,d>' ** <n,d> = 11? se sì, com'è definita?

4) Quale struttura algebrica è formata da (A,**,11)? Tale struttura è abeliana?

5) Indicare due monoidi M1 e M2 t.c. (A,**,11) sia il prodotto cartesiano dei monoidi M1 e M2

6) L'insieme delle coppie { <n, 3> | n ha come massimo divisore 3 } è un sottosemigruppo di A? E' un sottomonoide di A?

7) Considerare le due funzioni fst(<n,d>) = n e snd(<n,d>) = d. Sono dei morfismi rispettivamente da A verso M1 e da A verso M2? Se sì, esplicitarne i nuclei.

8) fst e snd sono suriettive? sono anche anche iniettive?

9) Esplicitare A/~fst, il quoziente di A rispetto alla relazione di equivalenza indotta dalla funzione fst, e A/~snd.

10) Esplicitare le classi di equivalenza [<6,3>]~fst e [<6,3>]~snd elencandone tutti gli elementi.

Esercizio 3 (10 punti):
Considerare il seguente codice che, data una lista di rettangoli rappresentati come coppie di numeri lunghezza/larghezza, ne raddoppia la lunghezza:

```
double_len [] = []
double_len (r::l) = dbl_length r :: double_len l
dbl_length <width, length> = <width, length*2>
```

Considerare anche il seguente codice che, data una lista di rettangoli, calcola la lista delle loro aree:

```
areas [] = []
areas (r::l) = area r :: areas l
area <width, length> = width*length
```

1) Le funzioni double_len e areas sono molto simili. Generalizzare il codice in modo tale da fattorizzare le similarità e riottenere i due codici originali come istanze di quello fattorizzato

2) Successivamente ci si rende conto che l'operazione di ricalcolo dell'area viene effettuata molto frequentemente e lo si vuole evitare. E' possibile ottenere due istanze della soluzione al punto 1 che lavorino sul tipo di dato <width, length, area> dove l'area viene mantenuta come terzo parametro? Se sì, mostrare le due istanze

3) Per le coppie di istanze ai punti 1) e 2) si sono passate delle funzioni, chiamiamole f e g, al codice generico del punto 1) dove f serve per raddoppiare la lunghezza e g per calcolare l'area di una figura geometrica. Quale equazione algebrica devono soddisfare f e g affinchè siano definite correttamente?