

LOGICA PER L'INFORMATICA

07/01/2022

Cognome: _____

Nome: _____

Matricola: _____

Esercizio 1 (1 punto):

Scrivere la sintassi della logica del prim'ordine.

Esercizio 2 (4 punti):

Considerare l'insieme delle stringhe di booleani generati dalla seguente grammatica:

$S ::= . | B S$
 $B ::= 0 | 1$

Esempio: 00101.

Il programmatore nota che le stringhe che verranno processate, che sono molto lunghe, presentano frequentemente lunghe sotto-sequenze in cui si alternano gli 0 con gli 1.

Esempio: 0101000101011010101.

Pertanto decide di inventarsi la seguente rappresentazione compressa delle stringhe:

$W ::= . | N : W$
 $N ::= 0 | S N$ (nel seguito indichiamo p.e. con 3 il numero $S(S(SO))$ come al solito)

dove la sequenza $n_1 : n_2 : \dots : n_k : .$ rappresenta la stringa ottenuta concatenando $[n_1] [n_2] \dots [n_k]$ dove, per ogni n_i ,

- 1) $[n_i]$ è una stringa di n_i booleani ottenuta alternando 0 e 1
- 2) $[n_i]$ inizia con 0 se i è pari e con 1 se i è dispari

ATTENZIONE a non confondere i con n_i ! Esempio: in $0:3:1:.$ si ha $n_2 = 3$ e 2 è pari

Esempio: $0 : 4 : 2 : 0 : 1 : .$ rappresenta la stringa 1010010. in quanto $[0] = .$, $[4] = 1010$, $[2] = 01$, $[0] = .$, $1 = [0]$.

Usando la ricorsione strutturale, compresa la possibilità di scrivere funzioni ausiliari o di passare parametri aggiuntivi alle funzioni, risolvere il seguente problema:

Problema 1: scrivere la funzione $[.]$ che decompone una stringa compressa

Esempio: $[[0 : 4 : 2 : 0 : 1 : .]] = 1010010$.

Mostrare l'esecuzione del vostro codice sull'esempio qui sopra.

Esercizio 3 (5 punti):

Dimostrare in teoria assiomatica degli insiemi il seguente enunciato, facendo attenzione che ogni passo della prova corrisponda a uno o più passi in deduzione naturale al prim'ordine ed enunciando prima gli assiomi/teoremi di teoria degli insiemi che utilizzate.

Teorema: $A = B \cap C \Rightarrow A \cup C = C$

Esercizio 4 (1 punto):

Dare la definizione di equivalenza logica senza fare riferimento alle tabelle di verità.

Esercizio 5 (1 punto):

Enunciare sinteticamente le tre cause scatenanti di molti paradossi in logica.

Esercizio 6 (1 punto):

Elencare le equivalenze logiche notevoli di de Morgan per i connettivi (congiunzione e disgiunzione)

Esercizio 7 (5 punti):

Considerare le seguenti funzioni definite su liste caratterizzate dalla sintassi $L ::= [] | \mathbb{N} : L$ dove \mathbb{N} genera tutti i numeri naturali, e su coppie di liste di naturali, definite dalla sintassi $C ::= \langle L, L \rangle$.

split p [] = ⟨[], []⟩
split p (x:l) = if p < x then ins1 p (split p l) else ins2 p (split p l)

ins1 p ⟨l1, l2⟩ = ⟨p: l1, l2⟩
ins2 p ⟨l1, l2⟩ = ⟨l1, p:l2⟩

sum [] = 0
sum (x:l) = x + sum l

red ⟨l1, l2⟩ = sum l1 + sum l2

Dimostrare, per induzione strutturale su L, che $\forall p. \text{sum } L = \text{red } (\text{split } p \ L)$, assumendo tutte le proprietà note sui numeri naturali. È possibile utilizzare lemmi ausiliari. Nel caso due lemmi siano estremamente simili, dimostrarne solo uno e dire che l'altro è analogo.

Esercizio 8 (6 punti):

Formalizzare il seguente ragionamento in logica proposizionale e dimostrarlo usando la deduzione naturale. Preferire una prova intuizionista a una classica ove possibile.

Se i cinquestelle si tirano indietro o la Lega non è d'accordo allora l'obbligo vaccinale non si farà.

La Lega è d'accordo o l'obbligo vaccinale viene posto in essere se Draghi insiste e le scuole non rimangono aperte.

Draghi insisterà o le scuole rimarranno aperte.

Quindi se la lega non è d'accordo allora le scuole resteranno aperte.

Esercizio 9 (1 punto):

Calcolare il risultato della seguente sostituzione minimizzando il numero di cambi di nome per le variabili legate.

$(\forall x. (\exists y. P(x,y,z)) \vee (\neg \forall z. P(x,y,z))) [(x + y) / y]$

Esercizio 10 (5 punti):

La seguente funzione, data una lista di numeri rappresentante il numero di contagi quotidiani da COVID, ne restituisce la media mobile semplice di periodo 7, ovvero la lista delle medie su 7 giorni consecutivi:

m [] = []
m (x:l) = sum 7 (x:l) / 7 : m l

sum N [] = 0
sum N (x:l) = if N == 0 then 0 else x + sum (N-1) l

Dopo qualche tempo ci si rende conto che anche la media mobile è gravata da dati giornalieri inaffidabili trasmessi dalle regioni. Il vostro capo vi chiede di sostituire il calcolo della media mobile semplice con quello della media mobile ponderata seguente (dove a^b significa a elevato alla b)

mp [] = []
mp (x:l) = sump 7 (x:l) / 1.984375 : m l

sump N [] = 0
sump N (x:l) = if N == 0 then 0 else x / 2^(N-1) + sump (N-1) l

Dopo aver googlato e scoperto che esistono decine di varianti di medie mobili, decidete di generalizzare la funzione passandole in input altre funzioni in modo tale da ottenere come istanze la media semplice, quella nuova richiesta e molte altre, compresa la media mobile geometrica semplice che, invece di sommare i valori di 7 giorni e dividere per 7, li moltiplica per poi farne la radice settima.

1) Scrivere il codice generalizzato passando in input le funzioni richieste

2) Mostare le tre istanze: media mobile semplice di periodo 7, media mobile ponderata di periodo 7 e media mobile geometrica semplice di periodo 7