Università di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
20/02/2020
Fila 1 (risolto)

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

$$t \ ::= \ x \mid c \mid f^n(t_1, \ldots, t_n)$$
$$P \ ::= \ \bot \mid \top \mid P^n(t_1, \ldots, t_n) \mid P \wedge P \mid P \vee P \mid \neg P \mid P \Rightarrow P \mid \forall x, P \mid \exists x, P$$

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi per le espressioni aritmetiche:

$$E ::= x \mid y \mid \ \ldots \ \mid E + E \mid E * E$$

Scrivere, per induzione strutturale su E, una funzione $nf(E)$ che ritorni un'espressione S, equivalente ad E, appartenente alla seguente grammatica:

$$S ::= P \mid S + S \qquad P ::= x \mid y \mid \ \ldots \ \mid P * P$$

I seguenti esempi sono scritti con l'usuale convenzione che la precedenza del prdotto sia superiore a quella della somma. Esempi:

- $nf(x * (y * (x + x))) = x * y * x + x * y * x$
- $nf((x + y) * (x + y * y)) = x * x + x * y * y + y * x + y * y * y$
- $nf((x + x + y) * (x + z) = x * x + x * x + y * x + x * z + x * z + y * z$

Potete implementare funzioni ausiliarie, sempre per ricorsione strutturale, e/o utilizzare parametri aggiuntivi.

Suggerimenti: ricordarsi della proprietà distributiva del prodotto sulla somma; testare il codice prodotto su qualche esempio.

```
Problema n. 1: data un'espressione trovarne una sommatoria di prodotti
equivalente
Soluzione: nf(E)

nf(x) = x
```

```
nf(E1 + E2) =  nf(E1) + nf(E2)

nf(E1 * E2) =  distr(nf(E1),nf(E2))

Problema n. 2: date due sommatoria di prodotti trovare la sommatoria
di prodotti equivalente
Soluzione: distr(S1,S2)  per ricorsione su S1

distr(P1, S2) = mult(P1, S2)

distr(S1 + S2, S3) = distr(S1,S3) + distr(S2,S3)

Problema n. 3: data una produttoria e una sommatoria di prodotti,
trovare la sommatoria di prodotti equivalente
Soluzione: mult(P1, S2)  per ricorsione su S2

mult(P1, P2) = P1 * P2

mult(P1, S1 + S2) = mult(P1,S1) + mult(P1,S2)
```

3 (4 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che

$$\forall A, \forall B, (A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B)$$

Scrivete la prova informalmente, ma facendo attenzione che ogni passaggio corrisponda a uno o più passi di una prova per deduzione naturale. Esplicitare una volta l'**enunciato** di tutti gli assiomi di teoria degli insiemi che state utilizzando.

Assoma di estensionalità:

$$\forall A, B, (A = B \iff \forall C, (C \in A \iff C \in B))$$

Assioma dell'unione binaria:

$$\forall A, B, C, (C \in A \cup B \iff C \in A \vee C \in B)$$

Assioma dell'intersezione binaria:

$$\forall A, B, C, (C \in A \cap B \iff C \in A \wedge C \in B)$$

Fisso A, B insiemi. Assumo $A \cup B = A \cap B$ (H). Dimostro $A = B$. Per assioma di estensionalità, basta dimostrare $\forall x, x \in A \iff x \in B$. Fisso x insieme.

Direzione $\Rightarrow$: assumo $x \in A$ (xA). Dimostro $x \in B$. Per assioma di estensionalità e H, $\forall y, y \in A \cup B \iff y \in A \cap B$ (H'). Quindi, per H' ho $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap B$. Dall'ipotesi xA e dall'assioma dell'insieme unione (che dice $\forall y, y \in A \cup B \iff y \in A \vee y \in B$) ho $x \in A \cup B$. Quindi per H' ho $x \in A \cap B$. Per l'assioma dell'intersezione, $x \in A \wedge x \in B$. Quindi $x \in B$.

L'altra direzione è analoga.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di deduzione semantica per la logica proposizionale classica.

Per ogni coppia di formule F, G e per ogni insieme di formule Γ si ha:

$$\Gamma \Vdash F \Rightarrow G \quad \iff \quad \Gamma, F \Vdash G$$

5 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica.

Per ogni formula F e insieme di formule Γ,

$$\Gamma \vdash F \quad \Rightarrow \quad \Gamma \Vdash F$$

6 (1 punto). Dare la definizione di equivalenza logica senza fare riferimento alle tabelle di verità.

Due formule F e G sono logicamente equivalenti ($F \equiv G$) sse $F \Vdash G$ e $G \Vdash F$.

7 (5 punti). Considerare le formule della logica proposizionale ristrette a variabili, $\bot$ e congiuzioni.
Dimostrare, per induzione strutturale su F, che $F[\bot/A] \wedge F[\top/A] \Vdash F$.

Procediamo per induzione strutturale su F.

Caso A: dimostro $A[\bot/A] \wedge A[\top/A] \Vdash A$, ovvero $\bot \wedge \top \Vdash A$. Ovvio perchè qualunque cosa è conseguenza logica del $\bot$.

Caso B: dimostro $B[\bot/A] \wedge B[\top/A] \Vdash B$, ovvero $B \wedge B \Vdash B$. Ovvio perchè $B \wedge B \equiv B$.

Caso $\bot$: dimostro $\bot[\bot/A] \land \bot[\top/A] \Vdash \bot$, ovvero $\bot \land \bot \Vdash \bot$. Ovvio perchè $\bot \land \bot \equiv \bot$.

Caso $F_1 \land F_2$:
per ipotesi induttiva $F_1[\bot/A] \land F_1[\top/A] \Vdash F_1$, per ipotesi induttiva $F_2[\bot/A] \land F_2[\top/A] \Vdash F_2$.

Dimostro $(F_1 \land F_2)[\bot/A] \land (F_1 \land F_2)[\top/A] \Vdash F_1 \land F_2$, ovvero $F_1[\bot/A] \land F_2[\bot/A] \land F_1[\top/A] \land F_2[\top/A] \Vdash F_1 \land F_2$. ovvero che in ogni mondo v, se $min\{[\![F_1[\bot/A]]\!]^v, [\![F_1[\bot/A]]\!]^v, [\![F_1[\top/A]]\!]^v, [\![F_2[\top/A]]\!]^v\} = 1$ allora $min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$.

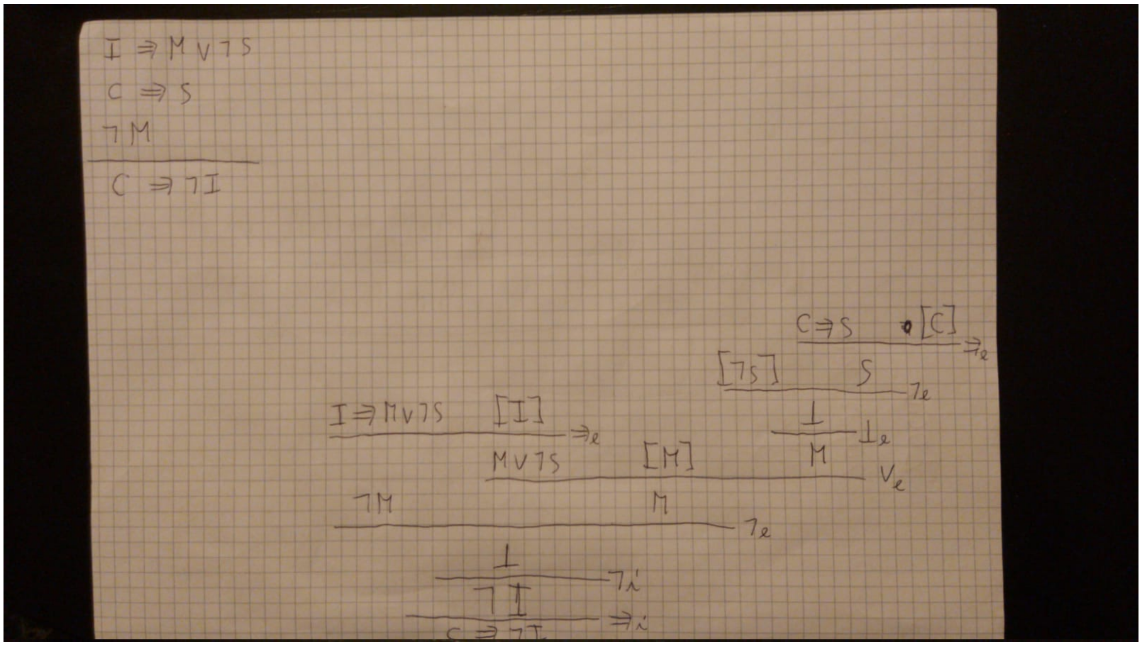
Sia v un mondo e supponiamo

$$min\{[\![F_1[\bot/A]]\!]^v, [\![F_1[\bot/A]]\!]^v, [\![F_1[\top/A]]\!]^v, [\![F_2[\top/A]]\!]^v\} = 1$$

da cui $min\{[\![F_1[\bot/A]]\!]^v, [\![F_1[\top/A]]\!]^v\} = 1$ e $min\{[\![F_2[\bot/A]]\!]^v, [\![F_2[\top/A]]\!]^v\} = 1$. Quindi, usando le due ipotesi induttive, si ha $[\![F_1]\!]^v = [\![F_2]\!]^v = 1$ e pertanto $min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} = 1$, come volevasi dimostrare.

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
Se i passeggeri sono infetti, allora moriranno o non potranno scendere dalla nave. I passeggeri potranno scendere dalla nave se supereranno i controlli. I passeggeri non moriranno. Quindi, se i passeggeri supereranno i controlli, allora i passeggeri non sono infetti.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.



9 (2 punti). Si scriva il risultato della seguente sostituzione ottenuto minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$(\Sigma_{y=y}^{b}\Sigma_{a=b}^{y}a)\{y^a/b\}$$

$$\Sigma_{z=y}^{y^a}\Sigma_{a=y^a}^{z}a$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\exists x, (P(g(x)) \vee Q(f(f(x))))), \quad (\forall x, (Q(f(x)) \Rightarrow P(g(x)))) \vdash \exists x, P(x)$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists x.(P(g(x)) \vee Q(f(f(x))))$}
\AxiomC{$[P(g(a)) \vee Q(f(f(a)))]$}
\AxiomC{$\forall x.\, Q(f(x)) \Rightarrow P(g(x))$}
\RightLabel{$\forall_x$}
\UnaryInfC{$Q(f(f(a))) \Rightarrow P(g(f(a)))$}
\AxiomC{$[Q(f(f(a)))]$}
\RightLabel{$\Rightarrow_e$}
\BinaryInfC{$P(g(f(a)))$}
\RightLabel{$\exists_i$}
\UnaryInfC{$\exists x.\, P(x)$}
\AxiomC{$[P(g(a))]$}
\RightLabel{$\exists_i$}
\UnaryInfC{$\exists x.\, P(x)$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\exists x.\, P(x)$}
\RightLabel{$\exists_i$}
\BinaryInfC{$\exists x.\, P(x)$}
\end{prooftree}
$$