Università di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
20/02/2020
Fila 2

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi per le espressioni aritmetiche:

$$E ::= \alpha \mid \beta \mid \ \ldots \ \mid E + E \mid E * E$$

Scrivere, per induzione strutturale su E, una funzione $nf(E)$ che ritorni un'espressione S, equivalente ad E, appartenente alla seguente grammatica:

$$S ::= P \mid S + S \qquad P ::= \alpha \mid \beta \mid \ \ldots \ \mid P * P$$

I seguenti esempi sono scritti con l'usuale convenzione che la precedenza del prodotto sia superiore a quella della somma. Esempi:

- $nf(\beta * (\alpha * (\beta + \beta))) = \beta * \alpha * \beta + \beta * \alpha * \beta$
- $nf((\beta + \alpha) * (\beta + \alpha * \alpha)) = \beta * \beta + \beta * \alpha * \alpha + \alpha * \beta + \alpha * \alpha * \alpha$
- $nf((\beta+\beta+\alpha)*(\beta+z) = \beta*\beta+\beta*\beta+\alpha*\beta+\beta*z+\beta*z+\alpha*z$

Potete implementare funzioni ausiliarie, sempre per ricorsione strutturale, e/o utilizzare parametri aggiuntivi.

Suggerimenti: ricordarsi della proprietà distributiva del prodotto sulla somma; testare il codice prodotto su qualche esempio.

3 (4 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che

$$\forall A, \forall B, (A = B \Rightarrow A \cup B \subseteq A \cap B)$$

Scrivete la prova informalmente, ma facendo attenzione che ogni passaggio corrisponda a uno o più passi di una prova per deduzione naturale. Esplicitare una volta l'**enunciato** di tutti gli assiomi di teoria degli insiemi che state utilizzando.

ATTENZIONE: non assumete nessuna proprietà del predicato di uguaglianza, ad eccezione dell'assioma di estensionalità. Per esempio, dall'ipotesi $A = B$ **NON** potete concludere, senza dimostrarlo esplicitamente, che $A \cup B = A \cup A$.

4 (1 punto). Dare la definizione di formula soddisfacibile.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Dare la definizione di equivalenza logica facendo riferimento alle tabelle di verità.

7 (5 punti). Considerare le formule della logica proposizionale ristrette a variabili, $\top$ e disgiunzioni.
Dimostrare, per induzione strutturale su F, che $F \Vdash F[\bot/A] \vee F[\top/A]$.

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
Se il contenimento sarà efficace e non ci saranno nuovi ceppi virali, allora il contagio non proseguirà. Se il contenimento non sarà efficace, allora nuovi paesi saranno colpiti. Non verranno colpiti nuovi paesi e non ci saranno nuovi ceppi virali. Quindi il contagio non proseguirà.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si scriva il risultato della seguente sostituzione ottenuto minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$\left(\int_y^b \int_b^y a \, da \, dy\right)\{\sqrt[a]{y}/b\}$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\forall x, (P(g(x)) \Rightarrow R(h(x)))), \quad (\exists x, (P(g(g(x))) \vee R(h(x)))) \vdash \exists x, R(x)$$