Università di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
20/02/2020
Fila 1

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi per le espressioni aritmetiche:

$$E ::= x \mid y \mid \ \dots \ \mid E + E \mid E * E$$

Scrivere, per induzione strutturale su E, una funzione $nf(E)$ che ritorni un'espressione S, equivalente ad E, appartenente alla seguente grammatica:

$$S ::= P \mid S + S \qquad P ::= x \mid y \mid \ \dots \ \mid P * P$$

I seguenti esempi sono scritti con l'usuale convenzione che la precedenza del prdotto sia superiore a quella della somma. Esempi:

- $nf(x * (y * (x + x))) = x * y * x + x * y * x$
- $nf((x + y) * (x + y * y)) = x * x + x * y * y + y * x + y * y * y$
- $nf((x+x+y)*(x+z) = x*x+x*x+y*x+x*z+x*z+y*z$

Potete implementare funzioni ausiliarie, sempre per ricorsione strutturale, e/o utilizzare parametri aggiuntivi.

Suggerimenti: ricordarsi della proprietà distributiva del prodotto sulla somma; testare il codice prodotto su qualche esempio.

3 (4 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che

$$\forall A, \forall B, (A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B)$$

Scrivete la prova informalmente, ma facendo attenzione che ogni passaggio corrisponda a uno o più passi di una prova per deduzione naturale. Esplicitare una volta l'**enunciato** di tutti gli assiomi di teoria degli insiemi che state utilizzando.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di deduzione semantica per la logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Dare la definizione di equivalenza logica senza fare riferimento alle tabelle di verità.

7 (5 punti). Considerare le formule della logica proposizionale ristrette a variabili, $\bot$ e congiuzioni.
Dimostrare, per induzione strutturale su F, che $F[\bot/A] \wedge F[\top/A] \Vdash F$.

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
Se i passeggeri sono infetti, allora moriranno o non potranno scendere dalla nave. I passeggeri potranno scendere dalla nave se supereranno i controlli. I passeggeri non moriranno. Quindi, se i passeggeri supereranno i controlli, allora i passeggeri non sono infetti.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si scriva il risultato della seguente sostituzione ottenuto minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$(\Sigma_{y=y}^{b} \Sigma_{a=b}^{y} a)\{y^a/b\}$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\exists x, (P(g(x)) \vee Q(f(f(x))))), \quad (\forall x, (Q(f(x)) \Rightarrow P(g(x)))) \vdash \exists x, P(x)$$