Università di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
07/01/2020
Fila 1

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

2 (4 punti). Considerare la seguente sintassi per le liste di numeri naturali:

$$L ::= \epsilon \mid \mathbb{N}; L$$

dove il ; è associativo a destra. Scrivere, per induzione strutturale su L, una funzione $f(L)$ che ritorni la lista di tutte le *vette* di L nell'ordine in cui compaiono in L, dove una vetta è un numero seguito solamente da altri numeri minori o uguali a lui.

Esempi: $f(3;7;7;4;2;5;1;\epsilon) = 7;7;5;1;\epsilon$.

L'unica funzione della quale potete assumere l'esistenza è $\cdot \leq \cdot$ utilizzabile per confrontare due numeri. Potete implementare funzioni ausiliarie, sempre per ricorsione strutturale, o utilizzare parametri aggiuntivi.

3 (4 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che $\forall A, \forall B, A \cap B \cup B = B$. Scrivete la prova informalmente, ma facendo attenzione che ogni passaggio corrisponda a uno o più passi di una prova per deduzione naturale. Esplicitare tutti gli assiomi di teoria degli insiemi che state utilizzando.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Come appare la tabella di verità di una formula che è soddisfacibile, ma non tautologica?

6 (1 punto). Dare la definizione di regola di derivazione invertibile.

7 (6 punti). Considerare le formule della logica proposizionale ristrette a variabili, $\bot$, negazioni e congiunzioni.
Definire per ricorsione strutturale la funzione *negate* che presa una formula F ne nega gli atomi.
Esempio: $negate(\neg A \wedge (\bot \wedge B)) = \neg\neg A \wedge (\bot \wedge \neg B)$.
Sia $v^\star$ il mondo ottenuto a partire dal mondo v in modo che, per ogni variabile A, $v^\star(A) = 0$ sse $v(A) = 1$.
Dimostrare, per induzione strutturale su F, che $[\![negate(F)]\!]^v = [\![F]\!]^{v^\star}$.

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se la Befana ti ha portato il carbone, allora si è sbagliata o non hai studiato abbastanza per l'esame. Hai studiato abbastanza per l'esame se hai evitato di uscire di casa. La Befana non si è sbagliata! Quindi, se hai evitato di uscire di casa, allora non hai ricevuto il carbone.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si scriva il risultato della seguente sostituzione ottenuto minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$(\int_y^b (\Sigma_{a=b}^y a)\ dy)\{a + y/b\}$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\exists x, (P(x) \Rightarrow Q(g(x)))), \quad (\forall x, (P(g(x) \vee Q(x))))) \vdash \exists x, Q(x)$$