Università di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
07/01/2020
Fila 2

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (4 punti). Considerare la seguente sintassi per le liste di numeri naturali:

$$L ::= \epsilon \mid \mathbb{N}; L$$

dove il ; è associativo a destra. Scrivere, per induzione strutturale su L, una funzione $f(L)$ che ritorni la lista di tutti gli *abissi* di L nell'ordine in cui compaiono in L, dove un abisso è un numero seguito solamente da altri numeri maggiori o uguali a lui.

Esempi: $f(3; 2; 7; 2; 5; 3; \epsilon) = 2; 2; 3; \epsilon$.

L'unica funzione della quale potete assumere l'esistenza è $\cdot \leq \cdot$ utilizzabile per confrontare due numeri. Potete implementare funzioni ausiliarie, sempre per ricorsione strutturale, o utilizzare parametri aggiuntivi.

3 (4 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che $\forall A, \forall B, (A \cup B) \cap B = B$. Scrivete la prova informalmente, ma facendo attenzione che ogni passaggio corrisponda a uno o più passi di una prova per deduzione naturale. Esplicitare tutti gli assiomi di teoria degli insiemi che state utilizzando.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza (forte) per la logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Come appare la tabella di verità di una formula che è insoddisfacibile o tautologica?

6 (1 punto). Dare la definizione di regola di derivazione localmente corretta.

7 (6 punti). Considerare le formule della logica proposizionale ristrette a variabili, $\top$, negazioni e disgiunzioni.
Definire per ricorsione strutturale la funzione *negate* che presa una formula F ne nega gli atomi.
Esempio: $negate(\neg A \vee (\top \vee B)) = \neg\neg A \vee (\top \vee \neg B)$.
Sia $v^\star$ il mondo ottenuto a partire dal mondo v in modo che, per ogni variabile A, $v^\star(A) = 0$ sse $v(A) = 1$.
Dimostrare, per induzione strutturale su F, che $[\![negate(F)]\!]^{v^\star} = [\![F]\!]^v$.

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se Babbo Natale ha letto la letterina e ha esaudito i tuoi desideri, allora non sarai bocciato. Se Babbo Natale non ha letto la letterina, allora l'hai spedita all'indirizzo sbagliato. Non hai sbagliato indirizzo e Babbo Natale ha esaudito i tuoi desideri. Quindi non sarai bocciato.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si scriva il risultato della seguente sostituzione ottenuto minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$(\Sigma_{y=y}^{b} \int_{b}^{y} a \; da)\{a + y/b\}$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\exists x, (P(g(x)) \Rightarrow Q(x)), \quad (\forall x, (P(g(h(x)) \vee Q(x))))) \vdash \exists x, Q(x)$$