Università di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
23/07/2019

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (4 punti). Considerare le formule della logica proposizionale generate dalla grammatica $F ::= A \mid B \mid \ldots \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid \neg F$. Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva m tale che per ogni F, $m(F)$ sia una formula logicamente equivalente a F ma dove le negazioni possono solamente essere applicate alle variabili proposizionali.

Esempio: $m(A \wedge \neg(B \wedge \neg C) = A \wedge (\neg B \vee C)$.

È possibile utilizzare funzioni ausiliarie, da definirsi usando la ricorsione strutturale e/o passare parametri ausiliari alle funzioni.

3 (4 punti). Dati due insiemi A e B, definiamo la loro *differenza simmetrica* $A \triangle B$ come $\{x \in A \mid x \notin B\} \cup \{x \in B \mid x \notin A\}$. Dimostrare in teoria assiomatica degli insiemi che $A \cup B = (A \triangle B) \cup A \wedge B$.

La dimostrazione deve essere scritta a parole, ma ogni passaggio deve poter essere espanso in uno o più passi di deduzione naturale al prim'ordine. Esplicitare gli assiomi di teoria degli insiemi che utilizzate.

4 (1 punto). Dimostrare che $\emptyset^\emptyset = \emptyset$.

5 (1 punti). Dare le definizioni di tautologia.

6 (1 punti). Dimostrare che l'insieme contenente solamente il connettivo binario NAND è funzionalmente completo.

7 (6 punti). Considerare la seguente sintassi per liste di elementi generati da un non-terminale T: $L ::= [] \mid T :: L$ dove :: è associativo a destra. Considerare inoltre le seguenti funzioni definite per ricorsione strutturale su tali liste:

```
filter(f,[]) = []
filter(f,X::L) = if f(X) then X::filter(f,L) else filter(f,L)

map(f,[]) = []
map(f,X::L) = f(X)::map(f,L)
```

Dimostrare, per induzione strutturale su L, che per ogni f, g si ha $filter(f, map(g, L)) = map(g, filter(f \circ g, L))$ dove la funzione composta $f \circ g$ è definita nel modo usuale, ovvero $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se i Cinque Stelle cedono sulla TAV ma la Lega non aumenta più nei sondaggi allora si andrà a votare lo stesso.
(b) Se la Lega continua ad aumentare nei sondaggi allora si farà la flat tax;
(c) È falso che: I Cinque Stelle cedono sulla TAV e si fa la flat tax.
(d) Perciò i Cinque Stelle non cederanno sulla TAV oppure si andrà a votare.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (1 punto). Effettuare la seguente sostituzione minimizzando il numero di cambi di nome per le variabili

$$((\Sigma_{x=y+1}^{y} x) + (\Sigma_{y=x+1}^{x} y))[x + y/x]$$

10 (4 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile.

$$\forall x \exists y,\ (x < y \lor y < x) \vdash (\exists x \forall y,\ \neg(y < f(f(x)))) \Rightarrow \exists x \exists y,\ f(x) < y$$