Università di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
26/06/2019

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi per formule della logica proposizionale:

$$\begin{array}{lcl} F & ::= & \bot \mid L \vee F \\ L & ::= & A \mid \neg A \mid B \mid \neg B \mid \ldots \end{array}$$

Le formule generate dal non-terminale L vengono chiamate letterali e quelle generate dal non-terminale F vengono chiamate disgiunzioni di letterali. Due letterali L e L' si dicono opposti se $L' = \neg L$ oppure $L = \neg L'$. Esempio: A e $\neg A$ sono opposti così come $\neg A$ e A.

Date due disgiunzioni $L^1_1 \vee \ldots \vee L^1_n \vee \bot$ e $L^2_1 \vee \ldots \vee L^2_m \vee \bot$ dove ci sono un L^1_i e un L^2_j opposti, la risolvente delle due disgiunzioni è la disgiunzione

$$L^1_1 \vee \ldots \vee L^1_{i-i} \vee L^1_{i+1} \ldots \vee L^1_n \vee L^2_1 \vee \ldots \vee L^2_{j-i} \vee L^2_{j+1} \ldots \vee L^2_m \vee \bot$$

Scrivere, per induzione strutturale, una funzione $r(F_1, F_2)$ che calcola una risolvente di F_1 e F_2, se esiste, oppure restituisce il simbolo di errore ϵ. In caso esista più di una risolvente, la funzione può restituirne una a sua scelta.

Esempi di output corretti:

- $r(C \vee A \vee \neg B \vee \bot, B \vee \neg A \vee C \vee \bot) = C \vee \neg B \vee B \vee C \vee \bot$
- $r(C \vee A \vee \neg B \vee \bot, B \vee \neg A \vee C \vee \bot) = C \vee A \vee \neg A \vee C \vee \bot$
- $r(A \vee \neg B \vee \bot, \neg B \vee C \vee \bot) = \epsilon$

È possibile utilizzare funzioni ausiliarie, da definirsi usando la ricorsione strutturale e/o passare parametri ausiliari alle funzioni.

3 (3 punti). Dimostrare in teoria assiomatica degli insiemi che

$$\forall A \forall B \forall C (A \cup (C \setminus B) = C \Rightarrow B \cap C \subseteq A \cap C)$$

dove $C \setminus B = \{x \in C \mid x \notin B\}$.

La dimostrazione deve essere scritta a parole, ma ogni passaggio deve poter essere espanso in uno o più passi di deduzione naturale al prim'ordine. Esplicitare gli assiomi di teoria degli insiemi che utilizzate.

4 (1 punto). Dare la definizione di regola invertibile per la deduzione naturale.

5 (1 punti). Dare le definizioni di insiemi finito e infinito.

6 (1 punti). Dimostrare, per ogni formula F della logica proposizionale, che $F \Vdash \bot$ sse $\neg F \equiv \top$.

7 (6 punti). Considerare le formule della logica proposizionale ristrette al frammento $F ::= A \mid \bot \mid F \vee F$. Dimostrare, per induzione strutturale su F, che F è soddisfacibile sse $F \equiv A$.

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
Se si fa la flat tax e non si disfa quota 100 il debito pubblico aumenta. O il debito pubblico non aumenta o all'Italia verrà comminata una multa. Se verrà comminata una multa allora il debito pubblico aumenterà. Quindi, anche se eviteremo la multa ma non disferemo quota 100, la flat tax non si farà.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Partizionare le seguenti formule in classi di equivalenza logica:
(a) $\neg(\neg P(x) \wedge \forall y.\neg P(y))$
(b) $(\exists x.P(x)) \vee P(x)$
(c) $\forall y.(P(y) \wedge P(x))$
(d) $\exists y.(P(x) \vee P(y))$
(e) $\neg\forall z.(\neg P(z) \wedge \neg P(x))$
(f) $\neg\forall y.(\neg P(x) \wedge \neg P(z))$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile.

$$(\forall y \exists x,\ f(x) = y), \quad (\forall x,\ g(f(x)) = h(f(x))) \vdash \forall z,\ g(z) = h(z)$$

Assumere la seguente ulteriore regola intuizionista di deduzione naturale per l'uguaglianza, dove X, X', Y, Y' sono variabili schematiche che potete rimpiazzare con ogni termine a vostro piacimento:

$$\frac{X' = X \quad g(X') = g(Y') \quad Y' = Y}{g(X) = g(Y)}\, g\text{-cong}$$

Nota: tale regola non è invertibile.