

# Università di Bologna

Corso di Laurea in Informatica  
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA  
20/02/2019      Fila 4

- 1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.
- 2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi per le liste di  $X$ :  $L ::= [] \mid X :: L$  dove  $::$  è associativo a destra. Scrivere la funzione ricorsiva  $f$  che su una lista  $L$  di numeri restituisca una lista di coppie di numeri  $\langle N, M \rangle$  dove  $\langle N, M \rangle \in f(L)$  sse ci sono esattamente  $M$  numeri diversi da  $N$  in  $L$ .

Esempio:

$$f(1 :: 2 :: 1 :: 4 :: 3 :: []) = \langle 1, 3 \rangle :: \langle 2, 4 \rangle :: \langle 4, 4 \rangle :: \langle 3, 4 \rangle :: []$$

È possibile utilizzare funzioni ausiliarie su liste, da definirsi usando la ricorsione strutturale, funzioni ausiliarie su numeri (da non definirsi) e/o passare parametri ausiliari alle funzioni.

- 3 (3 punti). Dimostrare in teoria assiomatica degli insiemi che

$$\forall A \forall B \forall C (C \supseteq A \cup B \iff C \supseteq A \wedge C \supseteq B)$$

La dimostrazione deve essere scritta a parole, ma ogni passaggio deve poter essere espanso in uno o più passi di deduzione naturale al prim'ordine. Esplicitare gli assiomi di teoria degli insiemi che utilizzate.

- 4 (1 punto). Dare la definizione di formula insoddisfacibile e mostrare un esempio di formula non atomica (= diversa da variabili,  $\perp$  e  $\top$ ) che soddisfi tale proprietà.
- 5 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica.
- 6 (1 punto). Dare due esempi di insiemi funzionalmente completi di connettivi e mostrare una riduzione del primo al secondo e viceversa.
- 7 (6 punti). Considerare le formule della logica proposizionale ristrette al frammento  $F ::= A \mid B \mid \top \mid F \wedge F$ . Dimostrare, per induzione strutturale su  $F$ , che  $F$  è tautologica sse  $F[B/A]$  lo è.

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se la TAV si farà e il movimento non si spacca allora i 5S ingoieranno il rospo. La TAV si farà se le penali saranno troppo alte. Se le penali saranno contenute il movimento dovrà decidere e si spaccherà. Quindi se il movimento non si spaccherà vuol dire che i 5 stelle ingoieranno un rospo di nuovo.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Effettuare la seguente sostituzione minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$(\sum_{\iota=-a}^{\iota+a} \Pi_{h=0}^{\iota} h + \beta)[a + \iota/\beta]$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile. Considerare il prodotto associativo a destra.

$$(\forall w. \exists z. w \geq k * z * k^{-1}) \Rightarrow \forall z. \exists w. k^{-1} * z \geq k * w$$