

# Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica  
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA  
08/01/2019, turno 1

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi delle liste di numeri naturali:

$$L ::= [] \mid \mathbb{N} :: L$$

dove  $::$  è associativo a destra. Scrivere la funzione ricorsiva strutturale  $f(L)$  che restituisca il booleano  $t$  sse ogni numero in  $L$  compare in  $L$  esattamente due volte.

Esempi:

- $f(1 :: 1 :: 2 :: 3 :: 2 :: 3 :: []) = t$
- $f(1 :: 1 :: 3 :: 2 :: 3 :: []) = ff$
- $f(1 :: 1 :: 2 :: 2 :: 1 :: []) = ff$

È possibile utilizzare funzioni ausiliarie su liste, da definirsi usando la ricorsione strutturale, funzioni ausiliarie su numeri (da non definirsi) e/o passare parametri ausiliari alle funzioni.

3 (3 punti). Dimostrare in teoria assiomatica degli insiemi che

$$\forall A \forall B \forall C \forall D (A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D)$$

4 (1 punto). Dare la definizione di riducibilità fra insiemi di connettivi.

5 (1 punto). Descrivere operativamente come determinare se  $F \Vdash G$  in logica proposizionale classica usando le tabelle di verità.

6 (1 punto). Scrivere il paradosso di Russell in teoria naive degli insiemi.

7 (6 punti). Considerare le formule della logica proposizionale ristrette al frammento  $F ::= A \mid B \mid \dots \mid \top \mid F \wedge F$ . Dimostrare, per induzione strutturale su  $F$ , che  $\Vdash F$  sse  $\Vdash F[\perp/A]$ .

8 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se si terrà un nuovo referendum allora la May non perderà o la Brexit verrà abortita. La May perderà e si sarà tenuto un nuovo referendum se l'UK non andrà in recessione. Quindi la Brexit verrà abortita o l'UK andrà in recessione.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Effettuare la seguente sostituzione minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$\left( \int_0^{z^2} (\sum_{j=x}^z j) dz \right) \{z + j/x\}$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$\exists x. \forall y. f(x) \leq f(y) \vdash \forall x. \exists y. y \leq f(f(x))$$