Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
17/09/2018

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi per le liste di numeri naturali:

$$L ::= \epsilon \mid N; L$$

dove il ; è associativo a destra e N è il tipo dei numeri naturali.

Scrivere, per induzione strutturale sulla lista di numeri L, una funzione ricorsiva $f(L)$ che calcola il numero di sottosequenze monotone crescenti massimali di L. È possibile utilizzare funzioni ausiliarie definite anch'esse per ricorsione strutturale.

Esempio: $f(3;5;2;1;4;12;6;6;\epsilon) = 5$ in quanto le sottosequenze monotone crescenti massimali dell'input sono
$(3;5;\epsilon); (2;\epsilon); (1;4;12;\epsilon); (6;\epsilon); (6;\epsilon); \epsilon$.

3 (2 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che

$$\forall A \forall B (A \subseteq \bar{B} \Rightarrow B \subseteq \bar{A})$$

dove $\bar{C}$ rappresenta il complemento dell'insieme C rispetto a un insieme universo fissato $\mathcal{U}$. Scrivete la prova informalmente, ma senza omettere nessun dettaglio: ogni passo della dimostrazione deve corrispondere a uno o più passi in deduzione naturale al prim'ordine. Indicare esplicitamente l'enunciato degli assiomi di teoria degli insiemi che state assumendo per completare la dimostrazione.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di deduzione semantica.

5 (1 punto). Dare la definizione di regola localmente corretta.

6 (1 punto). Dare un esempio di connettivo che non ammette regole di introduzione invertibile e un esempio di connettivo che ammette solo regole di introduzione invertibili.

7 (8 punti). Considerare la sintassi delle liste dell'esercizio 2 e le due seguenti funzioni ricorsive su liste:

$$
\begin{array}{ll}
sort(\epsilon) & = \epsilon \\
sort(N;L) & = insert(N, sort(L)) \\
\\
insert(N,\epsilon) & = N;\epsilon \\
insert(N,M;L) & = \textbf{if } N \leq M \textbf{ then } N;M;L \textbf{ else } M; insert(N,L)
\end{array}
$$

Supporre di avere già introdotto un predicato $N \in L$ e di avere già dimostrato i seguenti due lemmi:

(a) $\forall N,\ N \notin \epsilon$

(b) $\forall N,\ \forall M,\ \forall L,\ (N \in M;L \Rightarrow N = M \vee N \in L)$

Dimostrare, per induzione strutturale, i seguenti tre lemmi, propedeutici alla prova della correttezza dell'algoritmo di ordinamento.

(a) $\forall N,\ \forall L,\ N \in insert(N,L)$

(b) $\forall N,\ \forall L,\ \forall M,\ (N \in L \Rightarrow N \in insert(M,L))$

(c) $\forall N,\ \forall L,\ (N \in L \Rightarrow N \in sort(L)$

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
Se Brussels accetta la manovra allora essa è recessiva o la EU è in disfacimento. Se la manovra è recessiva allora Brussels non la accetta oppure il debito aumenterà. Quindi se la EU non è in disfacimento allora Brussels non accetta la manovra o il debito aumenterà.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si scriva un esempio di sostituzione $E_1\{E_2/x\}$ dove $|BV(E_1)| = 3$ e sia necessario solamente cambiare il nome di due delle tre variabili legate di E_1 per evitare il fenomeno del name-capture.

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\forall x, \neg\exists y, y > x) \Rightarrow \neg\exists x, f(x) > g(x)$$