

# Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica  
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA  
06/07/2018

- 1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.
- 2 (4 punti). Scrivere una funzione che, data in input una lista  $L$  di liste di numeri, restituisca la lista  $O$  di tutti e soli i numeri che occorrono in tutte le liste in  $L$ .
- 3 (3 punti). Dimostrare che

$$\forall A, \forall B, ((\forall C, C \cap A \subseteq C \cap B) \Rightarrow A \subseteq B)$$

ipotizzando che valgano la commutatività e l'idempotenza dell'intersezione e la transitività dell'inclusione. Scrivete la prova informalmente, ma senza omettere nessun dettaglio.

- 4 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica.
- 5 (1 punto). Dare la definizione di conseguenza logica per la logica proposizionale classica.
- 6 (1 punto). Mostrare due tautologie classiche che non sono dimostrabili in logica intuizionista.
- 7 (8 punti). Considerare alberi binari di numeri generati dalla grammatica

$$T ::= \diamond \mathbb{N} \mid T \circ T$$

liste di naturali generate dalla grammatica

$$L ::= \epsilon \mid \mathbb{N} :: L$$

(dove  $::$  è associativo a destra) e le funzioni

$$\begin{aligned} E(\diamond N, L) &= N :: L \\ E(T_1 \circ T_2, L) &= E(T_1, E(T_2, L)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon @ L_2 &= L_2 \\ (N :: L_1) @ L_2 &= N :: (L_1 @ L_2) \end{aligned}$$

- (a) Calcolare  $E((\diamond 1 \circ (\diamond 2 \circ \diamond 3)) \circ \diamond 4, \epsilon)$  mostrando tutti i passaggi intermedi. Cosa pensate calcoli la funzione  $E(T, \epsilon)$  ne caso generale?
- (b) Dimostrare, per induzione strutturale, che  $\forall T, E(T, L) = E(T, \epsilon) @ L$  assumendo che sia già stata dimostrata la proprietà associativa di @, ovvero  $\forall L_1, L_2, L_3, (L_1 @ L_2) @ L_3 = L_1 @ (L_2 @ L_3)$ .

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

- (a) Il figlio di Antonietta piange se è stanco o è da cambiare
- (b) Se Antonietta dorme allora suo figlio è certamente stanco
- (c) Dorme Antonietta se suo figlio non è da cambiare

Dunque:

- Se il figlio di Antonietta non piange è un miracolo

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si calcoli il risultato della seguente sostituzione minimizzando il numero di cambi di nome di variabili.

$$((\exists x.P(x+z)) \wedge (\forall y.P(y+z)))[(w \cdot x + \prod_{y=0}^n y)/z]$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\exists y.(Q(x) \Rightarrow P(g(x, y)))) \Rightarrow \exists z.(Q(z) \Rightarrow \exists y.P(y))$$