Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
21/06/2018

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (5 punti). Sia A un qualunque tipo di dato e $\approx$: $A \times A \to \mathbb{B}$ l'implementazione di una relazione di equivalenza su A. Considerare la seguente sintassi per le liste di numeri naturali:

$$L ::= \epsilon \mid B; L$$

dove il ; è associativo a destra e B è un tipo qualunque.

Scrivere, per induzione strutturale su L, lista di elementi di A pensata come un insieme di elementi di A, una funzione $f(L)$ che ritorni la lista delle classi di equivalenza di A a meno di $\approx$. Ovvero, $f(L)$ deve ritornare la lista $L_1; \ldots; L_n; \epsilon$ dove

(a) $\forall i, L_i \neq \epsilon$

(b) $\forall i, \forall j, \forall x \in L_i, \forall y \in L_j, x \approx y = tt \iff (i = j)$

Come visto a lezione potete implementare, sempre per ricorsione strutturale, funzioni ausiliarie e potete passare parametri ulteriori alle vostre funzioni se necessario.

3 (2 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che

$$\forall A \forall B (A \cap B \not\subseteq \emptyset \Rightarrow B \not\subseteq \emptyset)$$

Scrivete la prova informalmente, ma senza omettere nessun dettaglio.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di compattezza per la logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Dare la definizione di connettivo logico (semantico!) per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Dare la definizione di regola invertibile della deduzione naturale.

7 (8 punti). Considerare la sintassi delle liste dell'esercizio 2 e le due seguenti funzioni ricorsive su liste:

$$
\begin{aligned}
x \in \epsilon & = f\!f \\
x \in y; L & = (x = y) \mid\mid x \in L \\
\\
\epsilon \cap L_2 & = \epsilon \\
x; L_1 \cap L_2 & = if\ x \in L_2\ then\ x; (L_1 \cap L_2)\ else\ L_1 \cap L_2
\end{aligned}
$$

Dimostrare, per induzione strutturale, che

$$\forall L_1, L_2, x, \quad (x \in L_1 \cap L_2 = tt \iff x \in L_1 = tt \land x \in L_2 = tt)$$

Suggerimento: è possibile dimostrare separatamente le due implicazioni del $\iff$.

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
Se la Cina mette i dazi allora o gli USA li mette o non li mette la EU; ma se gli USA mette i dazi allora anche la Cina o la EU li mettono. Quindi la EU mette i dazi se lo fanno gli USA, oppure se la EU mette i dazi allora anche gli USA lo fanno.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si scriva un esempio di sostituzione $E_1\{E_2/x\}$ dove $|BV(E_1)| = 3$ e sia necessario solamente cambiare il nome di due delle tre variabili legate di E_1 per evitare il fenomeno del name-capture.

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\exists y.(Q(x) \Rightarrow P(g(x, y)))) \Rightarrow \exists z.(Q(z) \Rightarrow \exists y.P(y))$$