

Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
09/02/2018
Fila 2

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi per le liste di numeri naturali:

$$L ::= [] \mid \mathbb{N} :: L$$

dove il $::$ è associativo a destra. Scrivere, per induzione strutturale su L , una funzione $g(L_1, L_2)$ che ritorni il booleano $\#$ se la lista L_1 non contiene L_2 come sottolista.

Esempi:

$$g(0 :: 1 :: 2 :: 3 :: [], 1 :: 2 :: []) = \#$$

$$g(0 :: 1 :: 2 :: 3 :: [], 0 :: 2 :: []) = ff.$$

L'unica funzione della quale potete assumere l'esistenza è $\cdot = \cdot$ utilizzabile per confrontare due numeri. Potete implementare funzioni ausiliarie, sempre per ricorsione strutturale.

3 (2 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che

$$\forall A \forall B (A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A \subseteq B)$$

dove \bar{A} è il complemento dell'insieme A . Scrivete la prova informalmente, ma facendo attenzione che ogni passaggio corrisponda a uno o più passi di una prova per deduzione naturale.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Dimostrare il teorema di compattezza assumendo i teoremi di completezza forte e quello di correttezza.

6 (1 punto). Mostrare una formula insoddisfacibile di taglia 3 (= la cui rappresentazione come stringa contenga 3 caratteri). La formula non deve contenere \perp e \top .

- 7 (8 punti). Considerare la seguente sintassi per un frammento della logica proposizionale:

$$F ::= \perp \mid \neg F \mid F \vee F$$

Scrivere la funzione $f(F)$ che, data F , restituisca la formula che, letta come stringa, sia la palindroma di quella ottenuta leggendo F .

Dimostrare poi, per induzione su F , che $F \equiv f(F)$.

Nella dimostrazione NON è possibile utilizzare equivalenze logiche notevoli, ma solo le definizioni di equivalenza logica e funzione di interpretazione $\llbracket \cdot \rrbracket$.

- 8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se il festival di San Remo piace allora la popolazione è veramente invecchiata tanto o il gusto musicale è in caduta libera. Se invece il festival non piace allora il gusto musicale è in caduta libera. La popolazione non è ancora invecchiata così tanto o è meglio non guardare il festival. Quindi, se l'audio del televisore funziona e il gusto musicale non è in caduta libera, è meglio non guardare il festival.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

- 9 (2 punti). Si scriva il risultato della seguente sostituzione ottenuto minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$\left(\int_a^x xa \, dx \right) \{x + b/a\}$$

- 10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\forall x.(P(g(x)) \Rightarrow P(f(x)))) \Rightarrow (\exists x.P(g(g(x)))) \Rightarrow \exists x.P(f(x))$$