Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
09/02/2018
Fila 1

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi per le liste di numeri naturali:

$$L ::= \epsilon \mid \mathbb{N}; L$$

dove il ; è associativo a destra. Scrivere, per induzione strutturale su L, una funzione $f(L, L')$ che ritorni il booleano tt se la lista L contiene L' come sottolista.

Esempi: $f(0; 1; 2; 3; \epsilon, 1; 2; \epsilon) = tt$, $f(0; 1; 2; 3; \epsilon, 0; 2; \epsilon) = ff$.

L'unica funzione della quale potete assumere l'esistenza è $\cdot = \cdot$ utilizzabile per confrontare due numeri. Potete implementare funzioni ausiliarie, sempre per ricorsione strutturale.

3 (2 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che

$$\forall A \forall B (\bar{A} \subseteq A) \Rightarrow A \subseteq B)$$

dove $\bar{A}$ è il complemento dell'insieme A. Scrivete la prova informalmente, ma facendo attenzione che ogni passaggio corrisponda a uno o più passi di una prova per deduzione naturale.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Dimostrare il teorema di completezza forte assumendo i teoremi di compattezza e quello di completezza debole.

6 (1 punto). Mostrare una formula tautologica di taglia 3 (= la cui rappresentazione come stringa contenga 3 caratteri). La formula non deve contenere $\perp$ e $\top$.

7 (8 punti). Considerare la seguente sintassi per un frammento della logica proposizionale:

$$F ::= A \mid \neg F \mid F \wedge F$$

Scrivere la funzione $m(F)$ che, data F, restituisca la formula che, letta come stringa, sia la palindroma di quella ottenuta leggendo F.

Dimostrare poi, per induzione su F, che $m(F) \equiv F$.

Nella dimostrazione NON è possibile utilizzare equivalenze logiche notevoli, ma solo le definizioni di equivalenza logica e funzione di inerpretazione $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$.

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
Se il festival di San Remo piace allora la popolazione è veramente invecchiata tanto o il gusto musicale è in caduta libera. Se invece il festival non piace allora il gusto musicale è in caduta libera. La poplazione non è ancora invecchiata così tanto o è meglio non guardare il festival. Quindi, se l'audio del televisore funziona e il gusto musicale non è in caduta libera, è meglio non guardare il festival.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si scriva il risultato della seguente sostituzione ottenuto minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$(\int_y^b by\ dy)\{a + y/b\}$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\forall x.(Q(f(x)) \Rightarrow Q(g(x)))) \Rightarrow (\exists x.Q(f(g(x)))) \Rightarrow \exists x.Q(g(x))$$