

# Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica  
Prova scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA  
12/01/2018

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (5 punti). Considerare la seguente sintassi per le liste di numeri naturali:

$$L ::= \epsilon \mid \mathbb{N}; L$$

dove il  $;$  è associativo a destra. Scrivere, per induzione strutturale su  $L$ , una funzione  $f(L)$  che ritorni il booleano  $\#$  se la lista  $L$  è palindroma e  $\#f$  altrimenti.

Non potete assumere l'esistenza di nessuna operazione sulle liste (compresa, per esempio, l'uguaglianza). Come visto a lezione potete implementare, sempre per ricorsione strutturale, funzioni ausiliarie.

3 (2 punti). Dimostrare, in teoria degli insiemi, che

$$\forall A \forall B \forall C (A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C)$$

Scrivete la prova informalmente, ma senza omettere nessun dettaglio.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di compattezza per la logica proposizionale classica.

5 (1 punto). Dare la definizione, per ricorsione strutturale su  $F$  formula della logica del prim'ordine, di  $FV(F)$ , l'insieme delle variabili che compaiono libere in  $F$ .

6 (1 punto). Dare la definizione di conseguenza logica per la logica proposizionale senza fare riferimento alle tabelle di verità.

7 (8 punti). Considerare la seguente sintassi per un frammento della logica proposizionale:

$$F ::= A \mid \neg A \mid F \wedge F \mid F \vee F$$

Dimostrare per induzione strutturale che per ogni formula  $F$  **nel frammento** esiste una formula  $G$  **nel frammento** tale che  $F \equiv \neg G$ .

Suggerimento: è possibile utilizzare nella dimostrazione equivalenze logiche notevoli (come le leggi di De Morgan).

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

Se Salvini vince le elezioni allora governa con Berlusconi o non piazza ministri. Se invece Salvini perde le elezioni allora di sicuro non piazza ministri. Salvini non governa con Berlusconi o gli ex-DC tornano al governo. Quindi, se Grasso è al governo e Salvini piazza dei ministri, comunque gli ex-DC tornano al governo.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si scriva il risultato della seguente sostituzione ottenuto minimizzando il numero di cambi di nome alle variabili.

$$(\sum_{i=a}^i i * a)\{i + b/a\}$$

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$(\exists y.(P(x) \Rightarrow Q(f(x, y)))) \Rightarrow P(x) \Rightarrow \exists y.Q(y)$$