Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
Sessione Straordinaria del 23/05/2017

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (8 punti). Considerare la seguente sintassi per le liste: $L ::= \epsilon \mid X; L$ dove ϵ è la lista vuota e $X; L$ la lista la cui testa è X e la cui coda è L. Assumiamo che ; associ a destra.

Dato un insieme di numeri naturali rappresentato come una lista L priva di duplicati, scrivere una funzione $p(L)$ che restituisca la lista di tutti i sottoinsiemi di L, rappresentati a loro volta come liste di elementi di L prive di duplicati.

Esempio: $p(\epsilon) = \epsilon; \epsilon$ e $p(1; 2; \epsilon) = (1; 2; \epsilon); (1; \epsilon); (2; \epsilon); \epsilon; \epsilon$.

Suggerimento: potete utilizzare una o più funzioni ausiliarie definite a loro volta per ricorsione.

3 (1 punto). Scrivere le regole di introduzione ed eliminazione del quantificatore universale.

4 (1 punto). Dare un insieme di connettivi che non sia funzionalmente completo, assieme a una formula che ne provi l'incompletezza funzionale in quanto non esprimibile a meno di equivalenze logiche usando solo i connettivi dell'insieme da voi scelto.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Dire quale delle leggi di De Morgan per le congiunzioni e disgiunzioni non è valida intuizionisticamente.

7 (5 punti). Sia L un insieme di numeri naturali rappresentati tramite una lista priva di duplicati e sia p una funzione che risolva l'esercizio 2, ovvero tale per cui $p(L)$ sia la lista di tutti i sottoinsiemi di L. Dimostrare, per induzione su L, che $|p(L)| = 2^{|L|}$.

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) se Trump attacca la Corea del Nord allora la Cina vende il debito USA e gli USA sono finiti;
(b) la Corea del Nord attaccherà quella del Sud se Trump non l'attaccherà

prima e la Cina non interverrà con pressioni diplomatiche o militarmente;
(c) se la Corea del Nord attaccherà quella del Sud, la Cina interverrà militarmente; (d) la Cina non interverrà con pressioni diplomatiche così che
(e) in caso di mancato intervento militare della Cina, gli USA sono finiti.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2+2 punti). Si consideri la seguente definizione:

Un elemento y di un insieme (parzialmente) ordinato A è massimale *quando per ogni z, se y è minore o uguale a z allora $y = z$.*

Si espandi la definizione di elemento massimale nell'enunciato seguente, minimizzando il numero di cambi di nome di variabili.

Se x è l'elemento massimale dell'insieme (parzialmente) ordinato S e per ogni y massimale per S si ha $y = x$, allora x è anche il massimo di S (ovvero per tutti i z, z è minore o uguale a x).

Domanda bonus (2 punti): trovare un controesempio (modello della teoria) che dimostri che l'enunciato precedente non è conseguenza logica della definizione di insieme parzialmente ordinato (un insieme è parzialmente ordinato quando è dato con una relazione riflessiva e transitiva chiamata minore o uguale).

10 (3 punti). Dimostrare il seguente teorema usando la deduzione naturale al prim'ordine, preferendo una prova intuizionista a una classica ove possibile:

$$\exists x.\forall y.(P(y) \Rightarrow Q(y, f(x))) \vdash \forall x.\exists y.(P(x) \Rightarrow Q(x, y))$$