Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica

Esercitazione scritta di

LOGICA PER L'INFORMATICA

11 settembre 2015

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale

2 (3 punti). Usando solamente funzioni non ricorsive e funzioni ricorsive strutturali, scrivere un programma che, data una formula proposizionale F, ritorni `true` sse nella formula F l'unica variabile proposizionale che occorre nelle premesse delle implicazioni è A.

Es: $p(B \wedge (A \vee A \Rightarrow B)) = \texttt{true}$.

3 (1 punto). Dare la definizione di equivalenza logica

4 (1 punto). Dimostrare la correttezza locale delle regole $\wedge_I$ e $\wedge_{e_1}$.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di invarianza per sostituzione per la logica proposizionale classica.

6 (4 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(F_1 \wedge F_2) = f(F_2) \wedge f(F_1)$
$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad \ldots$
$f(\neg F) = \neg f(F)$
il cui dominio sono le formule ottenute solo da congiunzioni, negazioni e variabili proposizionali. Per ogni F dimostrare, per induzione strutturale su F, che $f(F) \equiv F$.

7 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

(a) Quante lamentele: la nave non è accogliente o i passeggeri sono troppo esigenti

(b) Se la pulizia è scarsa allora la nave non è accogliente

(c) Se la crociera disgusta quel raffinato di Luca, allora la pulizia è scarsa o almeno i passeggeri sono poco esigenti

(d) Quindi stranamente o la nave non è accogliente o Luca non ne è disgustato

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale classica.

8 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza:

"C'erano una volta tre fratelli.
La moglie di uno di loro
era la figlia di un altro
e l'amante del terzo e ultimo."

Formalizzare nel modo più accurato possibile la sentenza in logica del prim'ordine.

9 (2 punti). Dimostrare la seguente equivalenza logica notevole usando la deduzione naturale per la logica classica del prim'ordine:

$$A \Rightarrow \exists x.P(x) \vdash \exists x.(A \Rightarrow P(x))$$

10 (9 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:

1) $\forall x, y.(m(x, y) \Rightarrow m(h(x), h(y)))$
2) $\exists u.u = h(u)$
3) $\forall x, y.(m(x, y) \wedge m(y, x) \Rightarrow x = y)$
4) $\exists w.\neg h(w) = h(h(w))$

Nel corso dell'esercizio tutti i modelli debbono interpretare $=$ usando l'uguaglianza.

(a) Fornire almeno tre modelli distinti.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un modello che non soddisfi la formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un modello che soddisfi la formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata.

a) $\forall x, y.(m(h(x), h(y)) \Rightarrow m(x, y))$

b) $\exists a, b.\forall x.(x = a \vee x = b)$