Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
02 luglio 2015

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (3 punti). Definizione: $N \Rightarrow P$ è positiva sse N è negativa e P è positiva; $P \Rightarrow N$ è negativa sse P è positiva e N è negativa; $\neg P$ è negativa sse P è positiva; $\neg N$ è positiva sse P è negativa; la variabile proposizionale A è positiva.

Scrivere una funzione ricorsiva su F che ritorni tt se $f(F, tt)$ è positiva.

3 (1 punto). Quali condizioni debbono soddisfare A e I (il dominio e la funzione di interpretazione usate per dare la semantica di un linguaggio del prim'ordine in un mondo).

4 (1 punto). Mostrare un esempio di formula insoddisfacibile di taglia minima; fare lo stesso per le formule soddisfacibili.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza debole per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Enunciare il teorema di compattezza per la logica proposizionale classica.

7 (4 punti). Dimostrare, per induzione su F, formula della logica proposizionale ristretta alla variabile B, negazioni e implicazioni, che se F è positiva allora $F \equiv A$.

Suggerimento: è possibile utilizzare nella dimostrazione equivalenze logiche notevoli (tipo $A \vee A \equiv A$).

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
Se lo Shinkansen è in ritardo o il tassista non mi capisce perderò il volo da Osaka e la coincidenza per Bologna. Fortunatamente gli Shinkansen sono sempre puntuali. Inoltre la coincidenza per Washington è garantita se il volo per Bologna è un connecting flight. Quindi, poichè da Bologna proseguo per Washington, allora il tassista giapponese mi capisce di sicuro (?!?).

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale classica per la logica proposizionale.

9 (2 punto). Formalizzare in logica del prim'ordine la seguente sentenza: "*Per tre punti non allinearti passa una ed una sola circonferenza.*".

10 (1 punto). Dimostrare in deduzione naturale la seguente legge di De Morgan, dove $x \notin FV(Q)$.

$$(\exists x.P(x)) \Rightarrow Q \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow Q)$$

11 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x, f(f(f(x))) = f(x)$
2) $\exists x.\neg(f(x) = x)$
3) $\forall x.\exists y.f(y) = x$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti. Per tutto l'esercizio i modelli debbono interpretare il simbolo di uguaglianza come uguaglianza sul dominio.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza e assumere la seguente regola di inferenza: $\frac{t_1=t_2 \quad Q(t_1)}{Q(t_2)}(\texttt{rew})$ per t_1, t_2, Q qualsiasi.
a) $\forall x.f(f(x)) = x$
b) $\forall x.f(f(x)) = f(x)$
c) $\forall x.\neg(f(x) = x)$