Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
15 giugno 2014

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (2 punto). Scrivere una funzione ricorsiva su F che introduca una doppia negazione intorno a tutte le sottoformule che non siano già negazioni e che non siano variabili proposizionali. È possibile passare alla funzione altri parametri o usare funzioni ausiliarie. (es: $\neg(A \vee B) \wedge (A \wedge B) \mapsto \neg\neg(\neg(A \vee B) \wedge \neg\neg(A \wedge B)))$

3 (1 punto). Dare la definizione di correttezza locale di una regola di inferenza della deduzione naturale proposizionale.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la deduzione naturale proposizionale e dimostrarlo nel caso dell'introduzione dell'and.

5 (1 punto). Scrivere le regole di introduzione ed eliminazione del quantificatore esistenziale.

6 (1 punto). Dare la definizione di insieme funzionalmente completo di connettivi.

7 (3 punti).
(a) Dimostrare, per induzione strutturale su F, formula della logica proposizionale che contiene solamente congiunzioni, bottom, top e variabili proposizionali, che se $\Vdash F$ allora $\vdash F$ **senza** fare ricorso ai teoremi di completezza.
(b) Spiegare perchè la prova del punto 1 non funziona nel caso in cui si considerino anche disgiunzioni (pur restando l'enunciato un teorema).

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
1) se la Germania cede o i creditori allentano la morsa, allora la Grecia non uscirà dall'euro o sarà la fine del sogno europeo
2) i creditori allenteranno la stretta (per forza) se la Grecia esce dall'euro
3) il sogno europeo non si infrangerà (speriamo?)
quindi
4) la Grecia non uscrità dall'euro.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale. Preferire una prova intuizionista se possibile.

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "*C'erano almeno due doppiogiochiste fra le spie, perchè una di di loro è stata scoperta e ha rivelato il nome dell'altra.*" Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine.

11 (2 punti). Sia data la seguente formula F:

$$\forall x, \exists y, (P(x, y) \Rightarrow \exists x, Q(z, x))$$

Sia J la sottoformula $Q(z, x)$ e I la sottoformula che è un'implicazione.
Calcolare:
a) le variabili libere di F e di I
b) le varibili legate da F in I
c) le varibili legate da F in J

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x.r(x) = r(t(x))$
2) $\forall x.t(x) \neq x$
3) $\exists x.r(x) \neq x$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti. L'uguaglianza deve essere interpretata come uguaglianza in tutti i modelli.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza. Considerare inoltre il seguente assioma per l'uguaglianza (commutatività): $\forall x, y.x = y \Rightarrow y = x$.
   a) $\forall x.r(x) \neq x$
   b) $\forall x, y.(r(x) = r(y) \Rightarrow x = y)$
   c) $\forall x.r(t(x)) = t(r(x))$