Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
29 maggio 2015

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale

2 (3 punti). Si considerino formule generate dalla grammatica $F ::= A \mid F \Rightarrow F$. Un'occorrenza di A si dice in posizione positiva se si trova nella sottoformula sinistra di un numero pari di implicazioni, e negativa altrimenti. Scrivere una funzione $f(F, b)$ strutturalmente ricorsiva su F tale per cui $f(F, true)$ sia la formula ottenuta da F sostituendo tutte le occorrenze positive di A con P e quelle negative con N. Esempio:

$$f((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A), true) = (P \Rightarrow (P \Rightarrow N)) \Rightarrow (N \Rightarrow P)$$

Altro esempio: sono sottolineate una occorrenza di A e le implicazioni nel cui ramo sinistro essa occorre.

$$(A \Rightarrow (\underline{A} \underline{\Rightarrow} A)) \underline{\Rightarrow} (A \Rightarrow A)$$

Suggerimento: il booleano b, inizialmente a $true$, è sufficiente per codificare l'essere pari detto di un numero naturale.

3 (1 punto). Dare la definizione di problema semidecidibile.

4 (1 punto). Enunciare il teorema di invarianza per sostituzione.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica.

7 (2 punti). Supponiamo che P sia logicamente equivalente a $\top$. Dimostrare, per induzione strutturale su F, che $f(F, true)$ è una tautologia dove f è la soluzione dell'esercizio 2.

8 (10 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Supponiamo che la Grecia vada in default.
(b) La UE non perde pezzi solo se l'Italia o la Grecia non vanno in default.
(c) La Russia preferirebbe che la UE si sfaldasse.

(c) Quindi se l'Italia va in default la Russia è contenta.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale.

9 (2 punti). Formalizzare il seguente proverbio in logica del prim'ordine: "un amico è poco, e due son già troppi". Suggerimento: oltre ai quantificatori e ai connettivi logici, utilizzare solamente l'uguaglianza, un predicato unario e un predicato 0-ario.

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x, y, z. f(x, g(y, z)) = g(f(x, y), f(x, z))$
2) $\forall x, y. g(x, y) = g(y, x)$
3) $\neg(\forall x. \exists y. x = f(x, y))$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti. Per tutto l'esercizio i modelli debbono interpretare il simbolo di uguaglianza come uguaglianza sul dominio.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali = sia interpretata come uguaglianza e assumere le seguenti regole di inferenza per l'uguaglianza: $\frac{}{t=t}$ e $\frac{t_1=t_2 \quad t_2=t_3}{t_1=t_3}$.
a) $\forall x, y. f(x, y) = y$
b) $\forall x, y, z. g(x, f(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$
c) $\forall x, y, z. g(x, y) = g(x, z)$
d) $(\forall x, y, z. g(x, y) = g(x, z)) \Rightarrow \exists z. \forall x, y. g(x, y) = z$