Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di
LOGICA PER L'INFORMATICA
30/01/15

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

2 (3 punti). Considerare la seguente BNF per liste di a, b:

$$\begin{array}{lcl} L & ::= & \epsilon \mid NL \\ N & ::= & a \mid b \end{array}$$

Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva f che, data una lista L e un N, restituisce la lista ottenuta aggiungendo N in coda a L. Successivamente scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva g che, data una lista L, restituisce la

lista ordinata in ordine inverso. Esempi:
$f(abb\epsilon, a) = abba\epsilon$
$g(aabb\epsilon) = bbaa\epsilon$.

3 (1 punto). Definire cosa si intende per denotazione e connotazione.

4 (1 punto). Dare la definizione di regola di inferenza (localmente) corretta.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica.

6 (5 punti). Considerare solamente formule della logica proposizionale ristretta ai casi $\wedge, \top, \bot$ e variabili proposizionali. Dimostrare, per induzione strutturale su F, che se $\Vdash F$ allora $\vdash F$.

7 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se il patto del Nazareno regge verrà eletto Amato o Casini.
(b) Gli italiani non gradiscono Amato.

(c) Quindi se gli italiani saranno contenti allora o sarà stato eletto Casini oppure il patto sarà saltato.

Formalizzare il ragionamento in logica proposizionale e verificarne la correttezza per mezzo della deduzione naturale classica.

8 (2 punti). Dimostrare in deduzione naturale che

$$\exists x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall x.\exists y.P(y,x)$$

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "Un elemento m di X è minimo sse è minore o uguale a tutti gli elementi di X, ed è minimale se non vi sono elementi di X minori di lui". Formalizzarla usando, fra i simboli di predicati, anche il $\leq$. Le due definizioni sono equivalenti?

10 (9 punti). Si consideri la seguente teoria del primo ordine:

1) $\forall x.P(x, f(x))$
2) $\neg\exists x.P(x, x)$
3) $\forall x, y, z.(P(x, y) \wedge P(y, z) \Rightarrow P(x, z) \vee x = z)$
4) $\forall x, y.(P(x, y) \Rightarrow P(f(x), f(y)))$

(a) Fornire tre modelli distinti, interpretando sempre l'uguaglianza come uguaglianza nel modello. Dei tre modelli, almeno uno deve essere sui booleani e un altro deve essere di cardinalità infinita.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Quando si fanno dimostrazioni, assumere che valga la proprietà di replacemente dell'uguaglianza: $\frac{t_1=t_2 \quad F[t_2/t_1]}{F}$

a) $\exists x.f(x) = x$

b) $\forall x, y.(P(f(x), f(y)) \Rightarrow P(x, y))$

c) $\forall x.\exists y.P(y, f(f(x)))$

d) $\exists x.\forall y.(x = y \vee P(x, y))$