Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
08/01/15

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (2 punti). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F contenente solamente $\top, \wedge$ e variabili proposizionali, ritorni $true$ sse F è una tautologia.

3 (1 punto). Ordinare i connettivi della logica proposizionale da quello con priorità massima a quello con priorità minima e, per ognuno, indicarne l'associatività.

4 (1 punto). Dare la definizione di regola di inferenza invertibile.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di compattezza per la logica proposizionale classica.

6 (5 punti). Dimostrare, per induzione strutturale su F, formula della logica proposizionale ristretta ai casi $\wedge, \top$ e variabili proposizionali, che F è non tautologica sse $FV(F) \neq \emptyset$.

7 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Chi ha capito, passa l'esame
(b) Se non passa l'esame alora non ha studiato
(c) quindi o passa l'esame oppure non ha studiato e non ha capito.

Formalizzare il ragionamento in logica proposizionale e verificarne la correttezza per mezzo della deduzione naturale classica.

8 (3 punti). Dimostrare in deduzione naturale sia

$$\exists x.(P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$$

che

$$(\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x)) \vdash \exists x.(P(x) \vee Q(x))$$

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "La madre pose la domanda alla più giovane delle figlie, ma Concetta rispose". Formalizzarla in logica del prim'ordine catturando quanta più informazione possibile.

10 (9 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:

1) $\forall x.f(f(x)) = f(x)$
2) $\exists x.\neg f(x) = x$
3) $f(u) = u$
4) $\forall x.\exists y.(\neg x = y \wedge f(x) = f(y))$

(a) Fornire tre modelli distinti, interpretando sempre l'uguaglianza come uguaglianza nel modello. Dei tre modelli, uno deve avere cardinalità minima e un altro deve essere infinito.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Quando si fanno dimostrazioni, assumere che valgano le proprietà transitiva e simmetrica dell'uguaglianza:

$$\forall x, y, z.x = y \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z$$

$$\forall x, y.x = y \Rightarrow y = x$$

a) $\exists x.f(f(x)) = x$
b) $\forall x.f(f(x)) = x$
c) $\exists x, y.\neg f(x) = f(y)$