Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
esempio per l'anno accademico 2014-2015

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

Soluzione:

$$
\begin{array}{lcl}
t & ::= & x \mid c \mid f^n(t_1, \ldots, t_n) \\
F & ::= & P^n(t_1, \ldots, t_n) \mid \bot \mid \top \mid \neg F \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid F \Rightarrow F \mid \exists x.F \mid \forall x.F
\end{array}
$$

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F contenente solamente $\bot, \wedge$ e atomi, ritorni la formula logicamente equivalente alla F ottenuta rimpiazzando ogni sottoformula che contiene un $\bot$ con $\bot \wedge A$.

Soluzione:

$$
\begin{array}{l}
f(A) = A \\
f(B) = B \\
\ldots \\
f(\bot) = \bot \wedge A \\
f(F_1 \wedge F_2) = f(F_1) \wedge f(F_2)
\end{array}
$$

3 (1 punto). Enunciare le regole di De Morgan per i quantificatori.

Soluzione: $\neg \forall x.F \equiv \exists x.\neg F \quad \neg \exists x.F \equiv \forall x.\neg F$ Il verso da sinistra a destra della prima vale solamente in logica classica.

4 (1 punto). Dare la definizione di regola di inferenza (localmente) corretta.

Soluzione: Una regola di inferenza è localmente corretta quando la conclusione è conseguenza logica delle premesse.

5 (1 punto). Dimostrare il teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica assumendo che valgano il teorema di completezza debole e quello di compattezza.

Soluzione: Dimostriamo che per ogni Γ, F, se $\Gamma \Vdash F$ allora $\Gamma \vdash F$. Siano Γ e F generiche ma fissate tali che $\Gamma \Vdash F$. Per il teorema di compattezza esiste un Δ sottoinsieme finito di Γ tale che $\Delta \Vdash F$. Per il teorema di completezza debole $\Delta \vdash F$. Poichè $\Delta \subseteq \Gamma$ si ha anche $\Gamma \vdash F$.

6 (5 punti). Dimostrare, per induzione strutturale su F, formula della logica proposizionale ristretta ai casi $\wedge, \top, A, B$ che, per ogni mondo v, $v \Vdash F$ sse $v^\star \Vdash F^\star$ dove $v^\star(A) = v(B)$, $v^\star(B) = v(A)$ e $F^\star$ è ottenuta da F scambiando tutte le A con B e viceversa.

Soluzione: Per prima cosa definiamo $\cdot^\star$ per ricorsione strutturale:

$$\begin{aligned}
&\top^\star = \top \\
&A^\star = B \\
&B^\star = A \\
&(F \wedge G)^\star = F^\star \wedge G^\star
\end{aligned}$$

Sia v generica ma fissata. Dimostriamo per induzione su F che $v \Vdash F$ sse $v^\star \Vdash F^\star$.

Caso $\top$: Dimostro $v \Vdash \top$ sse $v^\star \Vdash \top^\star = \top$. Entrambe le formule sono false e pertanto il sse vale.

Caso A: Dimostro $v \Vdash A$ sse $v^\star \Vdash A^\star$, ovvero $v \Vdash A$ sse $[\![A^\star]\!]^{v^\star} = 1$. Si ha $[\![A^\star]\!]^{v^\star} = [\![B]\!]^{v^\star} = v^\star(B) = v(A)$. Il sse vale per definizione di $\Vdash$.

Caso $F_1 \wedge F_2$: Per ipotesi induttiva $v \Vdash F_i$ sse $v^\star \Vdash F_i^\star$ per $i \in \{1,2\}$. Dimostro $v \Vdash F_1 \wedge F_2$ sse $v^\star \Vdash (F_1 \wedge F_2)^\star$. Si ha $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = \min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\}$ che è uguale a 1 sse entrambe le interpretazioni sono 1. Quindi $v \Vdash F_1 \wedge F_2$ sse $v \Vdash F_1$ e $v \Vdash F_2$. Inoltre $v^\star \Vdash (F_1 \wedge F_2)^\star = F_1^\star \wedge F_2^\star$ per lo stesso motivo vale sse $v^\star \Vdash F_i^\star$ per $i \in \{1,2\}$. La dimostrazione è quindi ora ovvia per ipotesi induttiva.

7 (7 punti). Si consideri il seguente ragionamento:

(a) È falso che sia il pandoro che il panettone non facciano ingrassare
(b) Se non contiene grassi e zuccheri allora il panettone non ingrassa
(c) quindi se il pandoro non ingrassa allora il panettone contiene grassi e zuccheri

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale.

Soluzione: $\neg(\neg B \wedge \neg P),\ \neg M \Rightarrow \neg P \vdash \neg B \Rightarrow M$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\neg B \wedge \neg P) \qquad \dfrac{[\neg B] \qquad \dfrac{\neg M \Rightarrow \neg P \qquad [\neg M]}{\neg P}\Rightarrow_e}{\neg B \wedge \neg P}\wedge_i}{\bot}\Rightarrow_e}{M}RAA}{\neg B \Rightarrow M}\Rightarrow_i$$

8 (5 punti). Dimostrare in deduzione naturale che

$$\forall x.(P(x) \Rightarrow Q) \vdash (\exists x.P(x)) \Rightarrow Q$$

Soluzione:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x.P(x)] \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x.(P(x) \Rightarrow Q)}{P(y) \Rightarrow Q}\forall_e \qquad [P(y)]}{Q}\Rightarrow_e}{Q}\exists_e}{(\exists x.P(x)) \Rightarrow Q}\Rightarrow_i$$

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "Dei figli del re, uno divenne cavaliere, un altro frate e il terzo e ultimo scappò di casa".

Soluzione: Le informazioni fornite dalla frase sono:

- L'esistenza di un re e di tre figli, tutti rappresentabili tramite costanti (a, b, c per i figli, r per il re)
- Il fatto che i figli del re siano tali (prima linea della soluzione)
- Il fatto che ci fossero esattamente tre figli (seconda e terza linea)
- Cosa ogni figlio ha fatto (ultima linea)

$F(a,r) \wedge F(b,r) \wedge F(c,r) \wedge$
$\neg a = b \wedge \neg b = c \wedge \neg a = c \wedge$
$(\forall x.(F(x,r) \Rightarrow x = a \vee x = b \vee x = c)) \wedge$
$C(a) \wedge R(b) \wedge S(c)$

10 (8 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:

1) $\forall x, y.(x = y \Rightarrow x \leq y)$
2) $\forall x.x \leq m(x)$
3) $\exists x.\neg x = m(x)$
4) $\forall x, y.m(o(x, y)) = o(m(x), m(y))$

(a) Fornire tre modelli distinti, interpretando sempre l'uguaglianza come uguaglianza nel modello.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Quando si fanno dimostrazioni, assumere che valga la proprietà transitiva dell'uguaglianza: $\forall x, y, z.x = y \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z$.

a) $\forall x.m(m(x)) = m(x)$
b) $\forall x.x = m(x)$
c) $(\forall x, y.o(x, y) = o(y, x)) \Rightarrow \forall x, y.m(o(x, y)) = o(m(y), m(x))$

Soluzione:

A	$I(\leq)$	$I(m)$	$I(o)$	1	2	3	4	a	b	c
$\mathbb{Z}$	$\leq$	$\cdot^2$	$\cdot$	✓	✓	✓	✓	$\times$	$\times$	✓
$\mathbb{Z}$	$\leq$	$\lvert \cdot \rvert$	$\cdot$	✓	✓	✓	✓	✓	$\times$	✓
$[0, 10]$	$\leq$	$m(x) = 10$	max	✓	✓	✓	✓	✓	$\times$	✓

La (a) è soddisfacibile ma non tautologica.

La (b) è insoddisfacibile. Infatti la sua negata $\neg\forall x.x = m(x) \equiv \exists x.\neg x = m(x)$ (per De Morgan) è l'assioma 3.

La (c) è tautologica. Supponiamo che valga la proprietà $\forall x, y.o(x, y) = o(y, x)$ (H) e fissiamo x, y. Si ha

$$\begin{array}{rcll} m(o(x,y)) & = & o(m(x), m(y)) & \text{per l'assioma (1)} \\ & = & o(m(y), m(x)) & \text{per l'ipotesi (H)} \end{array}$$

(Notare che tale catena di uguaglianze è giustificata dalla proprietà transitiva dell'uguaglianza)