Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
24 settembre 2014

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F contenente solamente congiunzioni e disgiunzioni, $\bot$, $\top$ e atomi, ritorna la sua formula duale

4 (1 punto). Dare due definizioni equivalenti di equivalenza logica per la logica proposizionale classica.

3 (1 punto). Calcolare il numero di connettivi ternari, spiegando come é stato fatto il calcolo

5 (1 punto). Enunciare i teoremi di completezza forte e debole per la logica proposizionale classica

6 (1 punto). Dare la definizione di regola invertibile. Classificare le regole di introduzione ed eliminazione della disgiunzione rispetto alla loro invertibilità. Motivare la risposta.

7 (3 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(F_1 \wedge F_2) = f(F_1)$
$f(F_1 \vee F_2) = f(F_1) \vee f(F_2)$
$f(A) = A, \quad f(B) = B, \quad \ldots$
$f(\bot) = \bot, \quad f(\top) = \top$
il cui dominio sono le formule prive di negazioni e implicazioni.

(a) Calcolare $f((A \wedge B) \vee ((C \vee D) \wedge E))$

(b) Dimostrare, per induzione strutturale su F, che per ogni F e G si ha che $f(F) \Vdash G$ implica $F \Vdash G$

8 (8 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se Renzi o Berlusconi ci ripensano, salta l'accordo del Nazareno oppure le riforme vengono anacquate
(b) Renzi ci ripensa se salta l'accordo del Nazareno.
(c) Se Berlusconi ci ripensa, non si anacquano le riforme.
(d) Renzi ci ripensa sempre quando anche Berlusconi lo fa.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale intuizionista.

9 (2 punti). Si consideri la seguente sentenza: "*Nessuno dei fratelli è migliore di tutti gli altri, ma ognuno è migliore di almeno un altro.*".
Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine.

10 (1 punto). Mettere la seguente formula in forma normale disgiuntiva:

$$(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg(\neg B \vee A)$$

11 (2 punti). Spiegare in che senso la logica intuizionista è più generale della logica classica.

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x, y. f(x, y) = f(y, x)$
2) $\forall x, y, z. f(x, z) = f(y, z) \Rightarrow x = y$

Considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza.

(a) Fornire almeno tre modelli distinti di cui almeno uno sui booleani, uno su un insieme di numeri e uno su un insieme di insiemi.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza. Considerare inoltre le seguenti regole per l'uguaglianza: $\frac{E_1 = E_2 \quad E_2 = E_3}{E_1 = E_3}$, $\frac{E_1 = E_2}{E_2 = E_1}$

a) $\forall x, y. (\forall z. f(x, z) = f(y, z)) \Rightarrow x = y$
b) $\forall x, y. (\exists z, f(x, z) = f(y, z)) \Rightarrow x = y$
c) $\forall x. f(x, x) = x$
d) $\exists x_1, x_2. x_1 \neq x_2 \wedge (\forall y. f(x_1, y) = y) \wedge (\forall y. f(x_2, y) = y)$