Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
14 luglio 2014

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale

2 (2 punti). Scrivere una funzione ricorsiva strutturale che ritorni *true* sse la formula della logica proposizionale in input è della forma $F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n$ dove $F_1, \ldots, F_n \in \{\bot, \top, A, B, \ldots\}$. È possibile usare funzioni ricorsive strutturali ausiliarie e/o parametri extra.

3 (1 punto). Spiegare cosa indica il prefisso *meta* usato nelle espressioni metalivello, metalogica, etc.

4 (1 punto). Dare la definizione di linguaggio del prim'ordine.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Enunciare le leggi di De Morgan per i quantificatori.

7 (2 punti). Si consideri il linguaggio generato dalla seguente grammatica: $F ::= A \mid F \Rightarrow F$ e la seguente funzione il cui input è una quadrupla formata da un booleano $\in \{-1, +1\}$ e tre formule:
$f(-1, G_1, G_2, A) = G_1$,
$f(+1, G_1, G_2, A) = G_2$,
$f(n, G_1, G_2, F_1 \Rightarrow F_2) = f(-n, G_1, G_2, F_1) \Rightarrow f(n, G_1, G_2, F_2)$.

Supponiamo che $G_1 \Vdash F$ e $F \Vdash G_2$. Dimostrare, per induzione strutturale su una formula F del linguaggio, che $F \Vdash f(+1, G_1, G_2, F)$ e $f(-1, G_1, G_2, F) \Vdash F$.

8 (10 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Solo uno fra Amilcare e Berto erano sulla scena del crimine
(b) Se Carla non mente allora Berto si trovava dove è avvenuto il delitto
(c) Quindi se Amilcare è l'assassino allora Carla mente

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale.

9 (2 punti). Formalizzare il seguente luogo comune *nessun profeta in patria, ma di profeti è pieno il mondo* senza ricorrere a costanti e funzioni e usando esclusivamente i predicati $p(x, y)$ ("x è profeta nella patria y") e $P(x, y)$ ("y è la patria di x").

10 (2 punti). Dimostrare con la deduzione naturale la seguente legge di De Morgan dove $x \notin FV(Q)$.

$$(\forall x P(x)) \land \forall y Q(y) \Rightarrow \forall x (P(x) \land Q(x))$$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x. f(f(x)) = x$
2) $\forall x. g(x) \neq x$
3) $\forall x. h(x) \neq x$
4) $\forall x. f(g(x)) = g(f(x))$
5) $\forall x. f(h(x)) \neq h(f(x))$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti di cui uno sui numeri interi, uno sulle figure geometriche e uno sui vettori non nulli del piano. Per tutto l'esercizio i modelli debbono interpretare il simbolo di uguaglianza come uguaglianza sul dominio.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza e assumere le seguenti regole di inferenza per l'uguaglianza: $\frac{}{t=t}$, $\frac{t_1=t_2}{t_2=t_1}$, $\frac{t_1=t_2 \quad t_2=t_3}{t_1=t_3}$, $\frac{t_1=t_2}{\phi(t_1)=\phi(t_2)}$ dove ϕ è una combinazione di f, g, h (esempio: $\phi = f(g(f(h(\cdot)))))$.
a) $\forall x. f(x) = x$
b) $\forall x. g(x) = h(x)$
c) $\forall x. g(g(x)) \neq x$