Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
24 giugno 2014

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine.

2 (2 punti). Scrivere usando solamente funzione ricorsive strutturali un programma che prenda in input una formula F della logica proposizionale ristretta ad atomi, congiunzioni, $\bot$ e $\top$ e ritorni *true* sse gli atomi che occorrono nella formula lo fanno in maniera strettamente crescente quando la formula viene letta da sinistra a destra (in-visita). L'ordinamento è quello alfabetico (i.e. $A < B < C \ldots$).

3 (1 punto). Quali condizioni debbono soddisfare A e I (il dominio e la funzione di interpretazione usate per dare la semantica di un linguaggio del prim'ordine in un mondo).

4 (1 punto). Mostrare un esempio di formula insoddisfacibile di taglia minima; fare lo stesso per le formule soddisfacibili.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza debole per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Dare la definizione di conseguenza logica per la logica proposizionale classica.

7 (2 punti). Dimostrare, per induzione strutturale su F, formula generata dalla sintassi $F ::= \top \mid A \mid F \wedge F$ che se $\Vdash F$ sse $A \notin FV(F)$.

8 (10 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se uno studente è lento allora o non consegna o perde la partita
(b) Consegnare è condizione necessaria per passare l'esame.
(c) Nessuno studente perderà la partita.
(d) Quindi chi passa l'esame non è lento.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale per la logica proposizionale. Preferire una prova intuizionista ove possibile.

9 (1 punto). Si consideri il seguente proverbio:
"*un uomo fra due dame fa la parte del salame*". Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine cercando di essere il più fedeli possibili nella formalizzazione.

10 (1 punto). Dimostrare in deduzione naturale la seguente legge di De Morgan, dove $x \notin FV(Q)$.

$$(\exists x.P(x)) \Rightarrow Q \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow Q)$$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\exists x.\forall y, z.p(y, x) = p(z, x)$
2) $\exists x.\forall y.p(y, x) = y$
3) $\exists x.\forall y.\neg(y = c) \wedge \neg(y = d) \Rightarrow \neg(p(y, x) = y)$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti. Per tutto l'esercizio i modelli debbono interpretare il simbolo di uguaglianza come uguaglianza sul dominio.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza e assumere la seguente regola di inferenza: $\frac{t_1=t_2 \quad Q(t_1)}{Q(t_2)}(\texttt{rew})$ per t_1, t_2, Q qualsiasi.
a) $\forall x, y.p(x, y) = p(y, x)$
b) $\exists x.\forall y.x = y$
c) $\forall x, y, z.p(p(x, y), z) = p(x, p(y, z))$
d) $\exists x, y.\forall z.(z = x \vee z = y)$