Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
05 giugno 2014

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (1 punto). Scrivere usando solo funzioni strutturalmente ricorsive un programma che, data una formula F della logica proposizionale, restituisca `true` se F contiene solo atomi e disgiunzioni oppure solo atomi e congiunzioni.

3 (1 punto). Dare la definizione di paradosso e almeno due esempi di paradossi.

4 (1 punto). Dare due definizioni equivalenti di equivalenza logica per la logica proposizionale.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Dire se le regole di introduzione della congiunzione e della disgiunzione sono invertibili. Dimostrare tali quelle che lo sono e fornire un controesempio per quelle che non lo sono.

7 (2 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(\bot) = \top, \quad f(\top) = \bot, \quad f(A) = \neg A, \quad f(F_1 \vee F_2) = f(F_1) \wedge f(F_2)$
il cui dominio sono le formule che non contengono congiunzioni, negazioni e implicazioni. Dimostrare, per induzione strutturale su una formula F, che $f(f(F)) \equiv F$.

8 (10 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se qualcuno andrà in galera allora per il Mose sono state pagate mazzette o c'è stata distorsione di fondi pubblici
(b) Se nessuno andrà in galera allora per l'Expo tutto è stato regolare
(c) Qualche irregolarità per l'Expo c'è stata
(d) Quindi se per il Mose non sono state pagate mazzette allora c'è stata comunque distorsione di fondi pubblici

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale.

9 (2 punti). Formalizzare il seguente proverbio: *fra i due litiganti, il terzo gode* cogliendo nella formalizzazione il punto saliente del proverbio.

10 (2 punti). Dimostrare con la deduzione naturale la seguente legge di De Morgan dove $x \notin FV(Q)$.

$$(\forall x P(x)) \vee Q \Rightarrow \forall x(P(x) \vee Q)$$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:

1) $\forall x.P(x,x,x)$
2) $\forall x,y,z.(P(x,y,z) \to x = z \vee \forall w.\neg P(z,w,x))$
3) $\forall x,y,z,w.(P(x,y,z) \wedge P(y,z,w) \to P(x,z,w) \wedge P(x,y,w))$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti. Per tutto l'esercizio i modelli debbono interpretare il simbolo di uguaglianza come uguaglianza sul dominio.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali = sia interpretata come uguaglianza.

a) $\forall x,y.\exists z.P(x,z,y)$
b) $\forall x,y,z.(P(x,y,z) \Rightarrow \exists w.(\neg(z = w) \wedge P(x,y,w))$
c) $(\exists x,y.\neg(x = y)) \Rightarrow (\exists r,s,t.\neg P(r,s,t))$
d) $\exists y.\forall x.\neg\exists z.P(x,y,z)$