Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
11 febbraio 2014

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale.

2 (2 punti). Consideriamo formule contenenti solamente congiunzioni e variabili atomiche. Diciamo che il grado di sbilanciamento di un nodo dell'albero (una congiunzione) è il valore assoluto della differenza fra l'altezza della sottoformula destra e di quella della sottoformula sinistra. Una foglia ha grado di sbilanciamento 0. Scrivere, usando solamente funzioni strutturalmente ricorsive, un programma che calcoli il grado di sbilanciamento massimo fra quelli dei nodi di una formula F data.

3 (1 punto). Spiegare il rapporto che intercorre fra i mondi della logica proposizionale e le tabelle di verità.

4 (1 punto). Mostrare un esempio di formula insoddisfacibile di taglia minima; fare lo stesso per le formule soddisfacibili.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di correttezza per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Enunciare il teorema di compattezza per la logica proposizionale classica.

7 (2 punti). Dimostrare, per induzione strutturale su F, formula generata dalla sintassi $F ::= \top \mid A \mid F \wedge F$ che se $F_1 \equiv F_2$ allora $G[F_1/A] \equiv G[F_2/A]$.

8 (10 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se i Cinque Stelle insistono con l'impeachment, allora Napolitano lo subirà oppure Monti è diventato presidente regolarmente.
(b) Se l'incarico di Monti non è stato regolare, allora i Cinque Stelle insisteranno per l'impeachment.
(c) L'incarico di Monti non può essere stato regolare se Berlusconi è stato indebitamente danneggiato.
(d) Quindi o Berlusconi non è stato danneggiato oppure Napolitano subirà l'impeachment.

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale classica.

9 (2 punti). Si consideri il seguente enunciato matematico:

"*n non è un annichilatore se esiste un altro k per il quale vi è un unico m che rende $n * m$ uguale a k*"

Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine cercando di essere il più fedeli possibili nella formalizzazione.

10 (2 punti). Dimostrare in deduzione naturale la seguente legge di De Morgan, dove $x \notin FV(Q)$.

$$(\forall x.P(x)) \Rightarrow Q \vdash \exists x(P(x) \Rightarrow Q)$$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:

1) $\exists x.\forall y.\neg p(x,y) = y$
2) $\forall x,y.((\forall z.p(x,z) = p(y,z)) \Rightarrow x = y)$
3) $\forall x.\exists y.(x = d \vee p(x,y) = c)$
4) $\forall x,y,z.p(p(x,y),z) = p(x,p(y,z))$
5) $\forall x,y.p(x,y) = p(y,x)$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti, di cui almeno uno numerico e uno sui booleani. Per tutto l'esercizio i modelli debbono interpretare il simbolo di uguaglianza come uguaglianza sul dominio.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza e assumere la seguente regola di inferenza: $\frac{t_1=t_2 \quad Q(t_1)}{Q(t_2)}$(`rew`) per t_1, t_2, Q qualsiasi.

a) $\forall x,y.((\exists z.p(x,z) = p(y,z)) \Rightarrow x = y)$
b) $(\forall y.\neg p(c,y) = c) \Rightarrow c = d$
c) $\exists x.\forall y.p(x,y) = d$
d) $\forall x,y.\exists z,e.(x = d \vee p(x,p(y,z)) = p(y,e))$