Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
21 gennaio 2014

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica proposizionale

2 (1 punto). Scrivere un programma che, usando solo funzioni strutturalmente ricorsive o non ricorsive, calcoli il numero di variabili proposizionali distinte che compaiono in una formula della logica proposizionale.

3 (1 punto). Dare due definizioni equivalenti di equivalenza logica, di cui solamente una deve fare riferimento alle tabelle di verità.

4 (1 punto). Dare le definizione di problema semidecidibile e co-semidecidibile.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza debole per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Dimostrare l'invertibilità delle regole di introduzione ed eliminazione della congiunzione.

7 (2 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(\bot) = \top, \quad f(\top) = \bot, \quad f(A) = \neg A, \quad f(F_1 \wedge F_2) = f(F_1) \vee f(F_2)$
il cui dominio sono le formule che non contengono disgiunzioni, negazioni e implicazioni.

(a) Quali connettivi non possono apparire nel codominio della funzione?

(b) Dimostrare, per induzione strutturale su una formula F, che $\neg f(F) \equiv F$.

8 (10 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Quando chi si loda si imbroda, c'è giustizia a questo mondo
(b) Non è modesto chi si loda
(c) La giustizia non è di questo mondo
(d) Quindi non vi è modestia, e nemmeno ci si imbroda

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale. Preferire una prova intuizionista, se possibile.

9 (2 punti). Si consideri il seguente enunciato matematico: "*Se X è uno spazio di Hausdorff, allora per ogni funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e per ogni elemento*

$y \in X$, se esiste il limite di f per x che tende a y in X, allora tale limite è unico".
Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine cercando di essere il più fedeli possibili nella formalizzazione.

10 (2 punti). Dimostrare in deduzione naturale la seguente legge di De Morgan

$$\forall x.(\neg P(x)) \vdash \neg \exists x.P(x)$$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x.i(x, x) = x$
2) $\forall x, y.(i(x, y) \leq x \wedge i(x, y) \leq y)$
3) $\forall x.(p(x) \leq x \wedge \neg(p(x) = x))$
4) $\forall x, y.p(i(x, y)) \leq i(p(x), p(y))$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti. Per tutto l'esercizio i modelli debbono interpretare il simbolo di uguaglianza come uguaglianza sul dominio.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza.
a) $\exists x, y.p(i(x, y)) = i(p(x), p(y))$
b) $\forall x, y.p(i(x, y)) = i(p(x), p(y))$
c) $\exists x.\forall y.x \leq y$
d) $\exists x.\forall y.y \leq x$