Università degli Studi di Bologna

Corso di Laurea in Informatica
Esercitazione scritta di LOGICA PER L'INFORMATICA
14 gennaio 2014

1 (1 punto). Dare la sintassi per le formule della logica del prim'ordine

2 (1 punto). Scrivere una funzione strutturalmente ricorsiva che, data una formula F della logica proposizionale, restituisca `true` se F non contiene congiunzioni e `false` altrimenti.

3 (1 punto). Dare le definizioni di connotazione, denotazione e semantica.

4 (1 punto). Dare la definizione di formula soddisfacibile in logica proposizionale classica e mostrare un esempio di formula soddisfacibile e un esempio di formula insoddisfacibile. Motivare la risposta.

5 (1 punto). Enunciare il teorema di completezza forte per la logica proposizionale classica.

6 (1 punto). Dimostrare la correttezza locale delle regole di introduzione ed eliminazione della congiunzione.

7 (2 punti). Considerare la seguente funzione:
$f(\bot) = \top, \quad f(\top) = \bot, \quad f(A) = \neg A, \quad f(F_1 \vee F_2) = f(F_1) \wedge f(F_2)$
il cui dominio sono le formule che non contengono congiunzioni, negazioni e implicazioni.

(a) Quali connettivi non possono apparire nel codominio della funzione?

(b) Dimostrare, per induzione strutturale su una formula F, che $\neg f(F) \equiv F$.

8 (10 punti). Si consideri il seguente ragionamento:
(a) Se c'e' vita c'e' speranza
(b) Se quando c'è vita tutto va al meglio allora ci si accontenta di poco
(c) O non vi è speranza o tutto va alla grande
(d) Quindi ci si accontenta di poco

Verificare la correttezza del ragionamento utilizzando la deduzione naturale.

9 (2 punti). Si consideri la seguente strofa di una nota canzoncina per bambini: "*C'eran due nel letto e il più piccolo ha detto:* sto stretto, sto stretto". Formalizzare la sentenza in logica del prim'ordine cercando di essere il più fedeli possibili nella formalizzazione.

10 (2 punti). Dimostrare in deduzione naturale la seguente legge di De Morgan

$$\neg\exists x.P(x) \vdash \forall x.(\neg P(x))$$

12 (10 punti). Si consideri la seguente teoria del prim'ordine:
1) $\forall x.\neg P(x,x)$
2) $\forall x, y.(P(x,y) \to P(y,x))$
3) $\exists x, y.(P(x,c) \wedge P(c,y) \wedge \neg P(x,y))$
4) $\forall x, y, z.x = y \to P(x,z) \to P(y,z)$

(a) Fornire almeno tre modelli distinti di cui uno numerico, uno su oggetti e uno su alberi genealogici. Per tutto l'esercizio i modelli debbono interpretare il simbolo di uguaglianza come uguaglianza sul dominio.

(b) Per ognuna delle seguenti formule, dire se essa sia o meno una tautologia nella teoria appena data. Se lo è, si fornisca una prova, possibilmente intuizionista. Se non lo è, si mostri un'interpretazione che non sia un modello della formula. Inoltre, se la formula è soddisfacibile, fornire un'interpretazione che sia un modello della formula e se è insoddisfacibile fornire una dimostrazione della sua negata. Nota: considerare solo modelli nei quali $=$ sia interpretata come uguaglianza.
a) $\exists x, y.(\neg x = y \wedge \neg x = c \wedge \neg y = c)$
b) $\forall x, y, z.(P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z))$
c) $\exists d.\forall x.\neg P(x,d)$
d) $\exists d.\neg c = d$